Arithmétique (si ! si !)

On note $\mathbb{Q}(i)$ l'ensemble $\{a+bi, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

On se propose d'établir le théorème suivant :

Théorème 1 :

Il n'existe aucun complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

Ce théorème est suffisant pour démontrer l'irrationalité de π, $\ln(2)$, $\ln(3)$, e, e^2, e^3,….

1 Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!} e^{tz}\,\mathrm{d}t$.

- a Calculer $\mathrm{I}_0(z)$ et $\mathrm{I}_1(z)$.
- b Par une double intégration par parties et un peu de talent, montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+2}(z) = -\frac{4n+6}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z) + \frac{4}{z^2}\mathrm{I}_n(z).$$

Aide: On usera au bon moment de l'écriture $t^2 = 1-(1-t^2)$.

- c En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un polynôme A_n à coefficients entiers, tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{I}_n(z) = \frac{e^z\mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}.$$

Aide: Une récurrence double sera forcément nécessaire.

- d Préciser A_0, A_1, A_2 puis le degré et le coefficient dominant de A_n.

2
- a Montrer que si ω est dans $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{1}{\omega}$ est encore dans $\mathbb{Q}(i)$.
- b Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est stable par addition et multiplication.
- c Montrer que $\mathbb{Q}(i) = \left\{\dfrac{p}{q},\ (p\,;q) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{N}^*\right\}$.

On démontre maintenant le théorème annoncé en raisonnant par l'absurde.

Pour les questions 3 à 5, on suppose donc qu'il existe un $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

3
- a Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k^n\mathrm{I}_n(z) \in \mathbb{Z}[i]$.
- b Par une majoration adéquate, montrer que la suite $(k^n\mathrm{I}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Aide: On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$.

- c En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang n_0.

4 On note $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$. On choisit $\delta \in]0\,;1[$ tel que $\delta|y| < \dfrac{\pi}{3}$.

- a Déterminer $\mathrm{Re}\,(\mathrm{I}_n(z))$.
- b En déduire que pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0$.
- c Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^{\delta} (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

- d Pour $n \in \mathbb{N}$, établir :

$$\left|\int_{\delta}^{1} (1-t^2)^n \operatorname{ch}(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \operatorname{ch}(x).$$

5 Trouver une contradiction.

6
- a Montrer que π est irrationnel.
- b Montrer que e et e^2 sont irrationnels. Généraliser.
- c Montrer que $\ln(2)$ et $\ln(3)$ sont irrationnels. Généraliser.