Un peu de tout

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On définit pour tout $f \in \mathrm{E}$, la fonction :

$$\varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

A. Premier contact

ⓐ Justifier que φ est bien définie sur E et démontrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

ⓑ $\forall f \in \mathrm{E}$, déterminer $\varphi(f)(0)$. En déduire que φ n'est pas surjective.

ⓒ Soient $e_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^t$, $e_2 : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$.
Déterminer une base de $\varphi(\mathrm{A})$.

ⓓ Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f : t \longmapsto t\cos^{2n+1}(t)$. Calculer $\varphi(f)(\pi)$.

Aide: On pourra effectuer un changement de variable.

B. Régularité :

Soit $f \in \mathrm{E}$ et F l'unique primitive de f s'annulant en 0 .

ⓔ Montrer que $\varphi(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et exprimer $\varphi(f)'$ en fonction de F.

ⓕ En déduire que $\varphi(f) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et préciser sa dérivée seconde.

ⓖ Déterminer $\ker(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ?

ⓗ Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{E}$ telles que $\varphi(f) = f + 1$.

C. Un exemple :

On fixe dans tout le reste de ce problème $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.

ⓘ Soit $x \in [1;+\infty[$. Justifier que $\varphi(f)(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

ⓙ En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(f)(x) = +\infty$.

ⓚ Déterminer la parité de $\varphi(f)$.

ⓛ Dresser le tableau de variation de $\varphi(f)$ sur $\mathbb{R}$.

ⓜ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

ⓝ Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle à l'ordre n entre $-t^2$ et 0.

ⓞ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\varphi(f)(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{2(k+1)!(2k+1)}\right| \leqslant \frac{x^{2n+4}}{2(n+2)!(2n+3)}.$$

D. Une suite... d'intégrales !

On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \varphi\left(f^n\right)(1),$$

où l'on précise que f^n désigne bien le produit $f \times f \times \cdots \times f$.
On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{J}_n = \int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}}^{1} (1-t)\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t)\mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$

ⓟ Montrer que $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 .

ⓠ En déduire la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ⓡ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{K}_n \geqslant \mathrm{e}^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t)\,\mathrm{d}t$.

ⓢ En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ diverge.