Dénombrements

Une seule réponse exacte par question.

1 Le nombre d'entiers entre 1 et 60 qui ont la propriété d'être pairs ou d'être divisibles par 3 est

a ☐ 20 b ☐ 30 c ☐ 40 d ☐ 50

2 Combien y a-t-il de couples (a, b) dans $[\![0, 10]\!]^2$ tels que $a + b = 10$?

a ☐ 2 b ☐ 10 c ☐ 11 d ☐ 22

3 Le nombre de mots de 3 lettres distinctes qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

a ☐ $\binom{26}{3}$ b ☐ $3\binom{26}{3}$ c ☐ $26 \times 25 \times 24$ d ☐ $26^3 - 26$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de bijections de $\{0, \cdots, n\}$ sur lui-même est

a ☐ $n!$ b ☐ $(n+1)!$ c ☐ n^n d ☐ $(n+1)^{n+1}$

5 Quel est le cardinal de $\{0, \cdots, 10\}^2 \setminus \{(k, k), k \in \{0, \cdots, 10\}\}$?

a ☐ 10 b ☐ 89 c ☐ 90 d ☐ 110

6 Soit $n \geqslant 1$. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ vaut

a ☐ 0 b ☐ 1 c ☐ 2^n d ☐ $n!$

7 Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'entier $k\binom{n}{k}$ est égal à

a ☐ $n\binom{n-1}{k-1}$ b ☐ $n\binom{n-1}{k}$ c ☐ $n\binom{n-1}{k}$ d ☐ $n\binom{n}{k-1}$

8 Le nombre de mots de 5 lettres qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

a ☐ 26^5 c ☐ $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$

b ☐ 5^{26} d ☐ $\binom{26}{5}$

9 Le nombre de parties de $\{1, 2, \cdots, n\}$ qui ne contiennent pas 1 est :

a ☐ $2^n - 1$ b ☐ 2^{n-1} c ☐ $2^n - n$ d ☐ $\binom{n}{n-1}$

10 Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre d'applications de E dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est

a ☐ 2^{n^2} b ☐ 2^{2^n} c ☐ n^{2^n} d ☐ n^{n^2}

11 Combien y a-t-il de n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'entiers entre 1 et 10 qui contiennent au moins un nombre pair ?

a ☐ $\dfrac{10^n}{2}$ b ☐ $10^n - 5^n$ c ☐ $\dfrac{10^n}{5^n} = 2^n$ d ☐ $n^{10} - n^5$

12 Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre d'applications de E^2 dans E est

a ☐ n^3 b ☐ n^{2n} c ☐ n^{n^2} d ☐ n^n

13 Soit $n \geqslant 2$. Combien y a-t-il d'entiers k tels que $\dfrac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$?

a ☐ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$ b ☐ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ c ☐ $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ d ☐ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}$

14 Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$?

a ☐ $(1+x)^{2n+1}$ c ☐ $x(1+x^2)^n$ d ☐ $\left(1 + x^{2+\frac{1}{k}}\right)^n$

b ☐ $2^n x^{2n+1}$

15 Pour $p \in \mathbb{N}$, que vaut $\binom{p+3}{p} + \binom{p+3}{p+1}$?

a ☐ $\binom{p+3}{p+2}$ b ☐ $\binom{p+4}{p+1}$ c ☐ $\binom{p+4}{p}$ d ☐ $\binom{p+4}{2p+1}$

16 Pour tout $n \geqslant 1$, la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ est égale à

a ☐ $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ c ☐ $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

b ☐ $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ d ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

17 Le nombre de « suites » strictement croissantes formées de 5 entiers choisis dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, 10\}$ est

a ☐ $\dfrac{10!}{5!}$ b ☐ $\dbinom{10}{5}$ c ☐ 10^5 d ☐ $5!$

18 Quel est le nombre de couples (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|a|, |b|) \leqslant n$?

a ☐ $2n$ b ☐ $4n+2$ c ☐ $(2n)^2$ d ☐ $(2n+1)^2$

19 Soit n, p dans $\mathbb{N}^\star$. Lorsque f est une application de $\{1, 2, \cdots, n\}$ dans $\{1, 2, \cdots, p\}$, à partir de quelle valeur de n est-on en mesure d'affirmer qu'un des éléments de $\{1, 2, \cdots, p\}$ admet au moins trois antécédents ?

a ☐ $n \geqslant 3$ b ☐ $n \geqslant p+3$ c ☐ $n \geqslant 2p+1$ d ☐ $n \geqslant 3p$

20 Soit E un ensemble de cardinal n et A une partie de E de cardinal m. Soit p compris entre m et n. Combien y a-t-il de parties de E de cardinal p qui contiennent A ?

a ☐ $\dbinom{n}{p} - \dbinom{n-m}{p}$ c ☐ $\dbinom{m}{p-m}$

b ☐ $\dbinom{n}{p-m}$ d ☐ $\dbinom{n-m}{p-m}$