Dénombrements

Exercice 1 : *Les questions sont indépendantes.*

1. Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) possède le mot PROCRASTINATION ?

2. Combien y a-t-il de multiples de 3 dans l'ensemble $\{0, \ldots, 1\,000\}$?

3. Dans un jeu de 32 cartes (donc ne contenant pas les chiffres du 2 au 6 inclus), on tire simultanément 5 cartes.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien y a-t-il de tirages où quatre cartes portent le même numéro (ou la même figure) ?
   c. Combien y a-t-il de tirages où toutes les cartes sont de la même couleur ? *On rappelle qu'il existe quatre couleurs dans un jeu de cartes : pique, cœur, carreau, trèfle.*
   d. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un as et au moins un pique ?

4. On considère l'alphabet latin constitué de ses vingt-six lettres.
   a. Combien de mots (ayant un sens ou non) de cinq lettres toutes différentes peut-on former au total avec trois consonnes et deux voyelles quelconques ?
   b. Même question si l'on interdit aux trois consonnes d'être consécutives dans le mot.

5. Calculer le nombre de bijections f de $\{1, \ldots, 12\}$ dans lui-même telles que :
   a. si n est pair, alors $f(n)$ est pair ;
   b. si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3 ;
   c. les deux propriétés précédentes sont vérifiées simultanément.

6. Dans un jeu d'échecs standard, on tire simultanément quatre pièces parmi les blancs. Combien y a-t-il de tirages :
   a. en tout ?
   b. comportant exactement deux pions ?
   c. comportant au moins deux pions ?
   d. comportant le roi ou la reine ?
   e. comportant une tour, un pion, un cavalier et un fou ?

   Note : pour simplifier le dénombrement, on supposera toutes les pièces discernables.

7. Une grille de mots croisés est représentée par un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes (donc constituée de np cases), parmi lesquelles k sont noircies (et toutes les autres blanches).
   a. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
   b. Combien de grilles possèdent les quatre coins noirs ?
   c. Combien de grilles ont exactement deux coins noirs ?
   d. Dans cette question, on suppose $k \leqslant n$. Combien de grilles ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
   e. Dans cette question, on suppose $n = p = k$. Combien de grilles comportent exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?

8. Le sudoku est une grille de 9×9 cases (9 lignes, 9 colonnes), elle-même séparée en 9 régions carrées de 3×3 cases. On rappelle le principe : chaque ligne, chaque colonne et chaque région doit contenir exactement une fois chaque chiffre compris entre 1 et 9.
   a. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de sudoku vierge. *On présentera le résultat en donnant son unique décomposition en facteurs premiers.*
   b. Si l'on ne tient pas compte des règles du sudoku, combien y a-t-il de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille vierge ?

Exercice 2 : Coco, le perroquet du capitaine Haddock, ne possède que neuf mots dans son vocabulaire. Trois mots de la vie courante : « allô », « dring », « caramba » ; mais aussi six expressions inspirées du capitaine : « mille-sabords », « tonnerre », « ectoplasme », « moule-à-gaufre », « bachi-bouzouk », « malotru ».

On suppose que chaque phrase prononcée par le perroquet contient exactement six mots (possiblement répétés).

1. Combien de phrases Coco peut-il prononcer ?

2. a. Combien de phrases contiennent exactement six mots différents ?
   b. Combien de phrases contiennent exactement cinq mots différents ?
   c. En déduire le nombre de phrases contenant au moins cinq mots différents.

3. On suppose dans cette question que Coco n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « malotru », et que tous les autres mots proviennent de la vie courante.
   a. On fixe $p \in [\![0;6]\!]$. Combien de phrases Coco peut-il faire dans cette situation, en plaçant exactement p fois le mot « malotru » ?
   b. En utilisant une approche combinatoire, justifier la formule $4^6 = \displaystyle\sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}$.

      On ne fera aucun calcul.