# Dénombrements

**Exercice 1 :** *Les questions sont indépendantes.*

1. Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) possède le mot PROCRASTINATION ?

**Correction :** On doit faire attention au fait qu'il y a plusieurs lettres en doubles, à savoir : R, O, A, C, T, N. Il reste ensuite les lettres uniques P, C et S.

Pour former une anagramme de ce mot (ayant un sens ou non), on choisit d'abord la position des deux R parmi les 15 emplacements, ce qui donne $\binom{15}{2}$ possibilités.

Une fois les deux R placés, on doit choisir la position des deux O parmi les 13 restantes, soit $\binom{13}{2}$ possibilités.

De même pour le A : $\binom{11}{2}$ possibilités ; le C : $\binom{9}{2}$ possibilités ; le T : $\binom{7}{2}$ possibilités ; puis le N : $\binom{5}{2}$ possibilités.

Enfin, il reste à placer les trois lettres restantes (P, C et S) ; il s'agit là d'une permutation de 3 lettres, soit un nombre total de possibilités égal à $3!$.

Bilan. Le nombre d'anagrammes (sensées ou non) du mot PROCRASTINATION est de :

$$\begin{aligned}\binom{15}{2}\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}3! &= \frac{15\cdot 14}{2}\times\frac{13\cdot 12}{2}\times\frac{11\cdot 10}{2}\times\frac{9\cdot 8}{2}\times\frac{7\cdot 6}{2}\times\frac{5\cdot 4}{2}\times 6 \quad \text{(calcul facultatif)}\\ &= 105\times 78\times 55\times 36\times 21\times 10\times 6\\ &= 20\,432\,412\,000.\end{aligned}$$

2. Combien y a-t-il de multiples de 3 dans l'ensemble $\{0,\dots,1\,000\}$ ?

**Correction :** Soit $n\in\{0,\dots,1\,000\}$ : c'est un multiple de 3 si et seulement s'il s'écrit $n=3k$, avec $k\in\mathbb{N}$. Il suffit donc de compter tous les entiers $k$ tels que $0\leqslant 3k\leqslant 1\,000$. Pour ce faire, écrivons la division euclidienne de $1\,000$ par 3. On a $1\,000=3\times 333+1$. Ainsi,

$$0\leqslant 3k\leqslant 3\times 333+1 \iff 0\leqslant k\leqslant 333+\frac{1}{3} \iff 0\leqslant k\leqslant 333 \text{ car } k \text{ est un entier naturel.}$$

Il y a 334 entiers $k$ compris entre 0 et 333, donc le nombre de multiples de 3 entre 0 et $1\,000$ est de 334.

3. Dans un jeu de 32 cartes (donc ne contenant pas les chiffres du 2 au 6 inclus), on tire simultanément 5 cartes.

   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

   **Correction :** Il s'agit d'un tirage simultané (donc sans remise et sans prise en compte de l'ordre), ce qui donne en tout $\binom{32}{5}=201\,376$ tirages différents.

   b. Combien y a-t-il de tirages où quatre cartes portent le même numéro (ou la même figure) ?

**Correction :** Rappelons la composition d'un jeu de 32 cartes : il comporte les cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as ; chacune étant présente en quatre couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle).

Tout d'abord, un tel tirage est composé d'un groupe de quatre cartes avec le même numéro (ou même figure), ce qui donne $\binom{8}{1} = 8$ possibilités. En effet, il y a 8 groupes différents de quatre cartes identiques, à savoir :

- $\{7$ de pique, $7$ de cœur, $7$ de carreau, $7$ de trèfle$\}$ ;
- $\{8$ de pique, $8$ de cœur, $8$ de carreau, $8$ de trèfle$\}$ ;

  $\vdots$

- $\{$as de pique, as de cœur, as de carreau, as de trèfle$\}$.

Une fois le groupe de quatre cartes choisi, il reste à choisir 1 carte parmi les $32 - 4 = 28$ restantes, soit $\binom{28}{1} = 28$ possibilités.

**Bilan.** Il y a $\binom{8}{1}\binom{28}{1} = 8 \times 28 = 224$ tirages où quatre cartes portent le même numéro (ou même figure).

(c) Combien y a-t-il de tirages où toutes les cartes sont de la même couleur ? *On rappelle qu'il existe quatre couleurs dans un jeu de cartes : pique, cœur, carreau, trèfle.*

**Correction :** Notons A l'ensemble des tirages où toutes les cartes sont de la même couleur. On peut écrire A comme l'**union disjointe** $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, où $A_1$ contient les tirages ne comportant que des piques, $A_2$ que des cœurs, $A_3$ que des carreaux et $A_4$ que des trèfles. Ces quatre ensembles sont clairement en bijection (seule la couleur change), donc ont même cardinal. Ainsi, on a $|E| \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disj.}}}{=} |E_1| + \ldots + |E_4| = 4\,|E_1|$.

Il suffit donc de déterminer le cardinal de $E_1$, donc de compter le nombre de tirages ne comportant que des cartes de la couleur "pique". Il y a en tout 8 piques dans le paquet, donc il y a $\binom{8}{5}$ possibilités de tirer 5 piques parmi les 8 piques au total.

**Bilan.** $|E| = 4\binom{8}{5} = 4 \times \dfrac{8!}{3!5!} = 224$.

(d) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un as et au moins un pique ?

**Correction :** Introduisons quelques notations : on note E l'ensemble de tous les tirages possibles et B l'ensemble des tirages contenant au moins un as et au moins un pique. Par passage au complémentaire, $E \setminus B$ désigne l'ensemble des tirages contenant aucun as ou aucun pique.

Soit alors $C_1$ l'ensemble des tirages ne contenant aucun as et $C_2$ l'ensemble des tirages ne contenant aucun pique, de sorte que $E \setminus B = C_1 \cup C_2$.

<u>Calcul de $|C_1|$.</u> Il s'agit de tirer 5 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ cartes ne contenant pas les as, soit $\binom{28}{5}$ possibilités, c'est-à-dire $|C_1| = \binom{28}{5}$.

*Calcul de* $|C_2|$. Il s'agit de tirer 5 cartes parmi les $32-8=24$ cartes ne contenant pas les piques, soit $\binom{24}{5}$ possibilités, c'est-à-dire $|C_2| = \binom{24}{5}$.

*Calcul de* $|C_1 \cap C_2|$. L'ensemble $C_1 \cap C_2$ est l'ensemble des tirages ne contenant aucun as et aucun pique. On doit donc éliminer tous les piques (il y en a 8) ainsi que tous les as (il y en a 4), mais attention à l'as de pique qui est commun à ces deux catégories ! Au total, il faut donc éliminer $8+4-1=11$ cartes, ce qui laisse un choix de 5 cartes parmi $32-11=21$ cartes. Ainsi, $|C_1 \cap C_2| = \binom{21}{5}$.

*Calcul de* $|E \setminus B|$. On a :

$$|E \setminus B| = |C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| - |C_1 \cap C_2| = \binom{28}{5} + \binom{24}{5} - \binom{21}{5}.$$

*Conclusion : calcul de* $|B|$. On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} |B| = |E| - |E \setminus B| &= \binom{32}{5} - \binom{28}{5} - \binom{24}{5} + \binom{21}{5} \\ &= 80\,941 \qquad \text{(calcul facultatif).} \end{aligned}$$

4. On considère l'alphabet latin constitué de ses vingt-six lettres.

a) Combien de mots (ayant un sens ou non) de cinq lettres toutes différentes peut-on former au total avec trois consonnes et deux voyelles quelconques ?

**Correction :** Il s'agit d'abord de choisir trois consonnes (sur les vingt), puis deux voyelles (sur les six), soit $\binom{20}{3}\binom{6}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} \frac{6 \cdot 5}{2} = 17\,100$ possibilités vu qu'on "tire" ces lettres simultanément (l'ordre n'importe pas pour le choix des lettres et on les veut toutes distinctes). Une fois ces cinq lettres choisies, il s'agit de les permuter pour former un mot de cinq lettres, ce qui fait $5!$ possibilités. Au total, on obtient $\binom{20}{3}\binom{6}{2}5! = 2\,052\,000$ mots différents.

b) Même question si l'on interdit aux trois consonnes d'être consécutives dans le mot.

**Correction :** Comptons le nombre de mots (à trois consonnes et deux voyelles quelconques) contenant les trois consonnes consécutivement. Le nombre de façons de choisir ces lettres est toujours le même, à savoir $\binom{20}{3}\binom{6}{2}$. Une fois les lettres choisies, il y a trois possibilités pour que les consonnes soient consécutives : soit elles sont en positions 1, 2, 3, soit en positions 2, 3, 4, soit en positions 3, 4, 5. Dans chacun de ces trois cas, il y a autant de mots que de façons de permuter les trois consonnes ($3!$ possibilités) et les deux voyelles ($2!$ possibilités), soit $3! \cdot 2!$ possibilités. En prenant en compte les trois cas distincts, cela fait $3 \cdot 3! \cdot 2!$ possibilités pour que les consonnes se suivent.

Bilan : le nombre de mots que l'on peut former avec trois consonnes consécutives est de $\binom{20}{3}\binom{6}{2} \times 3 \cdot 3! \cdot 2! = 615\,600$, donc par passage au complémentaire, le nombre de mots n'ayant pas trois consonnes consécutives est de $2\,052\,000 - 615\,600 = 1\,436\,400$.

5. Calculer le nombre de bijections $f$ de $\{1, \ldots, 12\}$ dans lui-même telles que :

(a) si $n$ est pair, alors $f(n)$ est pair ;

**Correction :** Rappelons que $f$ est une bijection de $X = \{1, \dots, 12\}$ sur lui-même si et seulement si $f$ est injective (car $X$ est fini). Ainsi, $f$ est entièrement déterminée par les images $f(i)$ de chaque $i \in X$, et celles-ci doivent être toutes distinctes.

Pour respecter la propriété énoncée, il faut envoyer tous les nombres pairs sur eux-mêmes et tous les nombres impairs sur eux-mêmes. Le nombre de bijections de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dans lui-même étant de $6!$ (de même avec $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$), on en déduit que le nombre de bijections recherché est de $6! \cdot 6! = 518\,400$.

(b) si $n$ est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3 ;

**Correction :** Les entiers de $X$ divisibles par 3 sont 3, 6, 9 et 12. Comme précédemment, il s'agit d'envoyer ces quatre nombres sur eux-mêmes, et tous les autres sur eux-mêmes. Le nombre de bijections de l'ensemble $\{3, 6, 9, 12\}$ sur lui-même étant de $4!$ et le nombre de bijections de $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ sur lui-même étant de $8!$, alors le nombre de bijections recherché est de $4! \cdot 8! = 967\,680$.

(c) les deux propriétés précédentes sont vérifiées simultanément.

**Correction :** Cette fois-ci, pour prendre en compte les deux propriétés, les nombres 3 et 9 doivent être envoyés sur eux-mêmes, les nombres 6 et 12 également, puis tous les pairs restants sur les pairs restants, et de même avec les impairs restants :

- le nombre de bijections de $\{3, 9\}$ sur lui-même est de $2!$ ;
- le nombre de bijections de $\{6, 12\}$ sur lui-même est de $2!$ ;
- le nombre de bijections de $\{2, 4, 8, 10\}$ sur lui-même est de $4!$ ;
- le nombre de bijections de $\{1, 5, 7, 11\}$ sur lui-même est de $4!$,

donc le nombre total de bijections de $X$ sur lui-même satisfaisant aux deux propriétés est de $2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 4! = 2\,304$.

**6** Dans un jeu d'échecs standard, on tire simultanément quatre pièces parmi les blancs. Combien y a-t-il de tirages :

(a) en tout ?

**Correction :** Les pièces blanches aux échecs sont constituées de 8 pions, 2 tours, 2 cavaliers, 2 fous, 1 roi et 1 reine. S'agissant d'un tirage simultané de 4 pièces (supposées discernables !) parmi les 16 à notre disposition, il y a $\binom{16}{4} = 1\,820$ tirages possibles.

(b) comportant exactement deux pions ?

**Correction :** On choisit simultanément 2 pions parmi les 8, soit $\binom{8}{2}$ possibilités. Une fois fait, il reste à choisir 2 pièces parmi les 8 pièces qui ne sont pas des pions, soit $\binom{8}{2}$ possibilités également. Au total, on a $\binom{8}{2}^2 = 784$ tirages possibles.

(c) comportant au moins deux pions ?

**Correction :** Par passage au complémentaire, comptons le nombre de tirages comportant au plus 1 pion, c'est-à-dire soit aucun, soit exactement 1. Le nombre de tirages sans aucun pion est de $\binom{8}{4}$ (4 pièces parmi les 8 qui ne sont pas des pions) et le nombre de tirages comportant exactement 1 pion est de $\binom{8}{1}\binom{8}{3}$ (1 pion parmi les 8 puis 3 pièces parmi les 8 qui ne sont pas des pions). Le nombre de tirages comportant au moins deux pions est donc de $\binom{16}{4}-\binom{8}{4}-\binom{8}{1}\binom{8}{3}=1\,302$.

(d) comportant le roi ou la reine ?

**Correction :** Notons A l'ensemble des tirages comportant le roi et B l'ensemble des tirages comportant la reine. On cherche $|A\cup B|$. D'abord, $|A|=|B|=\binom{15}{3}$ (une fois le roi (ou la reine) choisi(e), on tire 3 pièces parmi les 15 restantes). Enfin, $A\cap B$ est l'ensemble des tirages contenant le roi et la reine, donc il y en a $\binom{14}{2}$ (choix de 2 pièces parmi les 14 restantes). Finalement, $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=2\binom{15}{3}-\binom{14}{2}=819$.

(e) comportant une tour, un pion, un cavalier et un fou ?

**Correction :** Comme il y a 2 tours, 8 pions, 2 cavaliers et 2 fous, le nombre de tirages recherché est de $\binom{2}{1}\binom{8}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=64$.

*Note : pour simplifier le dénombrement, on supposera toutes les pièces discernables.*

7 Une grille de mots croisés est représentée par un tableau rectangulaire à $n$ lignes et $p$ colonnes (donc constituée de $np$ cases), parmi lesquelles $k$ sont noircies (et toutes les autres blanches).

(a) Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?

**Correction :** Il s'agit de choisir $k$ cases noires parmi les $np$ cases disponibles dans la grille, soit $\binom{np}{k}$ possibilités. (C'est bien un tirage simultané, car on ne tient pas compte de l'ordre des cases noires dans la grille...).

(b) Combien de grilles possèdent les quatre coins noirs ?

**Correction :** Les quatre coins noirs étant déjà occupés, il s'agit de choisir les $k-4$ cases noires restantes à répartir parmi les $np-4$ cases disponibles, donc comme précédemment, il y a $\binom{np-4}{k-4}$ possibilités.

(c) Combien de grilles ont exactement deux coins noirs ?

**Correction :** Commençons par choisir les deux coins qui seront des cases noires : on a $\binom{4}{2}$ choix possibles. Ceci fait, il reste à choisir $k-2$ cases noires à répartir parmi les $np-4$ cases libres de la grille (attention : 2 coins exactement sont noirs, donc les 2 coins restants sont déjà blancs !), ce qui donne $\binom{np-4}{k-2}$ possibilités. Au total, on obtient $\binom{4}{2}\binom{np-4}{k-2}$ grilles avec deux coins noirs exactement.

(d) Dans cette question, on suppose $k\leqslant n$. Combien de grilles ont au plus une case noire sur chaque ligne ?

**Correction :** Comme $k\leqslant n$ et que l'on veut au plus une case noire par ligne, alors $k$ lignes vont comporter exactement une case noire (et les autres aucune). On commence par choisir les lignes possédant une case noire, ce qui fait $\binom{n}{k}$ possibilités ($k$ lignes parmi les $n$ au total).

Pour chacune de ces configurations, appelons $L_1, \dots, L_k$ les $k$ lignes possédant une seule case noire. Sur $L_1$, on choisit la position de l'unique case noire : $p$ choix possibles (car il y a $p$ colonnes) ; sur $L_2$, c'est pareil : $p$ choix possibles etc. jusqu'à la ligne $L_k$ où l'on a encore $p$ choix pour la case noire, ce qui fait en tout $p^k$ possibilités pour répartir les cases noires.

Bilan : il y a $\binom{n}{k}p^k$ possibilités de grilles avec au plus une case noire par ligne.

(e) Dans cette question, on suppose $n = p = k$. Combien de grilles comportent exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?

**Correction :** Raisonnons ligne par ligne (par exemple) :

- Ligne 1 : $n$ possibilités pour placer l'unique case noire.
- Ligne 2 : il reste $n-1$ possibilités pour placer la deuxième case noire (car la colonne doit être différente).
- $\vdots$
- Ligne $n-1$ : il reste 2 possibilités car seulement deux colonnes libres.
- Ligne $n$ : plus qu'une seule possibilité.

Bilan : il y a $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$ grilles avec une seule case noire par ligne et par colonne. (C'est exactement pareil que si l'on permute les cases noires sur une même ligne en les rendant discernables...).

8 Le sudoku est une grille de $9 \times 9$ cases (9 lignes, 9 colonnes), elle-même séparée en 9 régions carrées de $3 \times 3$ cases. On rappelle le principe : chaque ligne, chaque colonne et chaque région doit contenir exactement une fois chaque chiffre compris entre 1 et 9.

(a) Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de sudoku vierge. *On présentera le résultat en donnant son unique décomposition en facteurs premiers.*

**Correction :** C'est un peu plus restrictif que la question précédente (sans la présence des régions carrées $3 \times 3$, ce serait $9!$ possibilités). Raisonnons à nouveau ligne par ligne (par exemple) que l'on note $L_1, \dots, L_9$ :

- $L_1$ : il y a 9 possibilités pour le 1 en première ligne.
- $L_2$ : il faut changer de région, ce qui laisse 6 possibilités (car 3 cases à éviter dans la première région).
- $L_3$ : on n'a pas le droit aux deux régions précédentes, ce qui laisse 3 possibilités dans la troisième et dernière région.
- $L_4$ : il reste 6 possibilités (car 3 colonnes ont déjà été prises, mais le choix des régions carrées est de nouveau libre).
- $L_5$ : il y a 4 possibilités (car 2 colonnes libres dans les 2 autres régions carrées).
- $L_6$ : il y a 2 possibilités (car 2 colonnes libres dans la troisième région carrée).
- $L_7$ : il y a 3 possibilités (car 3 colonnes libres : une par région).
- $L_8$ : il y a 2 possibilités (car 1 colonne libre dans les deux dernières régions).
- $L_9$ : plus qu'une possibilité.

Au total, on obtient :

$$9\times6\times3\times6\times4\times2\times3\times2\times1=(3^3\cdot3!)\times(2^3\cdot3!)\times3!=(3\cdot2)^3\times(3!)^3=(3!)^6=6^6=2^6\cdot3^6\quad(=46\,656).$$

(b) Si l'on ne tient pas compte des règles du sudoku, combien y a-t-il de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille vierge ?

**Correction :** C'est la même chose que pour les cases noires dans une grille de mots croisés : on place 9 chiffres 1 parmi les 81 cases de la grille, soit $\binom{81}{9}$ possibilités (c'est bien un tirage simultané, car l'ordre des 1 n'est pas pris en compte).

**Commentaires:** *On trouve 260 887 834 350 : la proportion de grilles de sudoku parmi toutes les grilles faisables est donc extrêmement faible... (en regardant seulement le positionnement des 1).*

**Exercice 2 :** Coco, le perroquet du capitaine Haddock, ne possède que neuf mots dans son vocabulaire. Trois mots de la vie courante : « allô », « dring », « caramba » ; mais aussi six expressions inspirées du capitaine : « mille-sabords », « tonnerre », « ectoplasme », « moule-à-gaufre », « bachi-bouzouk », « malotru ».

On suppose que chaque phrase prononcée par le perroquet contient exactement six mots (possiblement répétés).

1. Combien de phrases Coco peut-il prononcer ?

**Correction :** Il s'agit du nombre de sextuplets (liste de 6 mots) d'éléments de l'ensemble des mots possibles (de cardinal 9), soit $9^6$ phrases au total.

**Commentaires:** *L'ordre des mots dans la phrase compte, donc aucun coefficient binomial n'intervient ici.*

2. (a) Combien de phrases contiennent exactement six mots différents ?

**Correction :** Il s'agit du nombre de sextuplets d'éléments distincts de l'ensemble des mots possibles, soit $\dfrac{9!}{(9-6)!}=\dfrac{9!}{3!}$ ou encore $9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=60\,480$.

(b) Combien de phrases contiennent exactement cinq mots différents ?

**Correction :** Une phrase de six mots contenant exactement cinq mots différents possède un unique mot en double. Il y a 9 choix possibles pour ce mot en double, que l'on doit ensuite placer dans la phrase, ce qui donne $\binom{6}{2}$ possibilités (choix de 2 emplacements dans la phrase, parmi les 6 possibles, et l'ordre ne compte pas car c'est le même mot). Ceci fait, il reste à former une liste de 4 mots distincts (c'est-à-dire un quadruplet d'éléments distincts) dans l'ensemble des mots restants qui est de cardinal 8, soit $\dfrac{8!}{(8-4)!}=\dfrac{8!}{4!}$.

Bilan : il y a $9\times\binom{6}{2}\times\dfrac{8!}{4!}=9\times\dfrac{6\times5}{2}\times8\times7\times6\times5=226\,800$ phrases contenant exactement cinq mots différents.

*Variante.* On choisit les 5 mots qui constituent la phrase, donc $\binom{9}{5}$ choix possibles. Parmi ces 5 mots, on en choisit un seul qui sera répété, donc 5 choix possibles. Il reste à placer les 2 mots identiques, donc $\binom{6}{2}$ possibilités, puis à placer les 4 mots différents restants, soit

4! possibilités (permutation des 4 mots restants sur les 4 emplacements restants). En tout, on obtient :

$$\binom{9}{5} \times 5 \times \binom{6}{2} \times 4! = 226\,800.$$

(c) En déduire le nombre de phrases contenant au moins cinq mots différents.

**Correction :** Il s'agit du nombre de phrases contenant exactement cinq mots différents plus le nombre de phrases contenant exactement six mots différents. D'après les deux questions précédentes, on obtient :

$$9 \times \binom{6}{2} \times \frac{8!}{4!} + \frac{9!}{3!} = 287\,280.$$

3. On suppose dans cette question que Coco n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « malotru », et que tous les autres mots proviennent de la vie courante.

(a) On fixe $p \in [\![0;6]\!]$. Combien de phrases Coco peut-il faire dans cette situation, en plaçant exactement $p$ fois le mot « malotru » ?

**Correction :** On commence par choisir les $p$ places occupées par le mot « malotru » parmi les 6 emplacements possibles, soit $\binom{6}{p}$ (l'ordre n'importe pas car il s'agit du même mot). Ensuite, il reste à former une liste de $6-p$ mots (c'est-à-dire un $(6-p)$-uplet) de la vie courante, qui sont au nombre de 3, soit $3^{6-p}$ possibilités (l'ordre importe et les répétitions sont possibles). Finalement, on obtient $\binom{6}{p}3^{6-p}$ phrases possibles.

(b) En utilisant une approche combinatoire, justifier la formule $4^6 = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}$.

**Correction :** Comptons de deux façons différentes le nombre de phrases que l'on peut faire avec le mot « malotru » et les trois mots de la vie courante. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des phrases possibles.

*Première façon.* Il s'agit du nombre de quadruplets d'éléments de l'ensemble des mots possibles (il y en a 4 ici), donc $|\mathcal{A}| = 4^6$.

*Deuxième façon.* Dans une telle phrase de 6 mots, distinguons le nombre de fois qu'apparaît « malotru » : soit il n'apparaît pas, soit il n'apparaît qu'une fois, soit deux fois etc. jusqu'à apparaître les six fois. On est donc en train d'écrire $\mathcal{A}$ en une union disjointe $\mathcal{A} = \bigcup_{p=0}^{6} \mathcal{A}_p$ où $\mathcal{A}_p$ est l'ensemble des phrases contenant exactement $p$ fois le mot « malotru ». D'après la question précédente, $|\mathcal{A}_p| = \binom{6}{p}3^{6-p}$. Comme l'union est disjointe :

$$4^6 = |\mathrm{A}| = \sum_{p=0}^{6} |\mathcal{A}_p| = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}.$$