Bilan

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est demandé d'encadrer les résultats des calculs et de numéroter les copies. ***Une attention toute particulière devra être portée sur l'énoncé et le nom des théorèmes utilisés. Toute affirmation, même correcte, sans justification sera survolée de la même manière et oubliée.***

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur la copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Problème 1 : On note $\varphi : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & \varphi(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$

1. (a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^0([0\,;1])$.

   (b) Montrer que $\forall\, t \in [0\,;1]$, $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et pour $\alpha \in]0\,;1[$, $\mathrm{J}_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier l'existence de I_n et $\mathrm{J}_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calculer $\mathrm{J}_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties et montrer que :
   $$\lim_{\alpha \to 0^+} \mathrm{J}_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}.$$

   (c) Montrer que : $\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}}$. Qu'en déduit-on pour $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^\alpha t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t$?

   (d) Déduire de la question précédente que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} (\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n(\alpha)) = 0$ puis la valeur de I_n.

   (e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{I}_n$ converge.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k, \quad \mathrm{S} = \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n = \int_0^1 t^{n+1}\psi(t)\,\mathrm{d}t, \text{ avec } \psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{1-t} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ -1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

a) Justifier l'existence de S et R_n.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \mathrm{S} - \mathrm{R}_n$.
c) Justifier l'existence de $\mathrm{M} = \sup_{t\in[0;1]} |\psi(t)|$ puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n+2}.$$

d) Finalement montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{S}$.

4 On admet dans cette question que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (argh !).

a) En déduire à l'aide de 2 la valeur exacte de $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n$.
b) Montrer finalement que :

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2-6}{6}.$$

Problème 2 : Le problème est consacré à une expression simple des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de rang 1 .

— Dans la première partie, on étudie un exemple.
— Dans la deuxième partie, on obtient une expression simple des matrices carrée d'ordre 3 , de rang 1 , et vérifiant une équation matricielle.
— La troisième partie établir un résultat général sur les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de rang 1.
— En particulier, nous en déduisons dans la dernière partie une expression simple de tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, de rang 1, et non nilpotents.

A) Un exemple.

On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1 Calculer $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

2 Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ?

3 Préciser les éléments caractéristiques de f, ainsi qu'une base de chacun de ces derniers.

4 Déduire de précédemment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Si l'on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, préciser la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

B) Une équation matricielle.

On cherche toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 et vérifiant la relation :

$$\mathrm{M}^2 = \alpha \mathrm{M}, \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à M et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

6 Montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{M}) \subset \ker\,(\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I})$ et en déduire :

$$\dim\,(\ker\,(\mathrm{M})) + \dim\,(\ker\,(\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I})) \geqslant 3.$$

7 Montrer que $\ker\,(\mathrm{M}) \oplus \ker\,(\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I}) = \mathbb{R}^3$.

8 Justifier l'existence de vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\ker\,(\mathrm{M}) = \mathrm{vect}\,(e_1, e_2) \quad \text{et} \quad \ker\,(\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I}) = \mathrm{vect}\,(e_3)\,.$$

9 Justifier rapidement pourquoi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

10 En déduire le résultat suivant : si une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 vérifie la relation $\mathrm{M}^2 = \alpha \mathrm{M}$, alors $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} \in \mathscr{G}\ell_3(\mathbb{R})$.

C) Un résultat général.

On considère dorénavant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ et tel que $\mathrm{rg}\,(f) = 1$.

11 Justifier l'existence d'un vecteur e de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(e) \neq 0$ et montrer que $\ker\,(f) \oplus \mathrm{vect}\,(e) = \mathbb{R}^n$.

12 Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f^2(e) = \alpha f(e).$$

13 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $f^2(x) = \alpha f(x)$.

14 En déduire une relation vérifiée par M, la matrice de f dans la base canonique.

D) Synthèse et exemple.

15 En vous aidant des résultats précédents, montrer que si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 1$ et $\mathrm{M}^2 \neq (0)_3$, alors il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{G}\ell_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha \neq 0.$$

16 On suppose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 1$. Préciser alors α, D et P.

Problème 3 : *Dans ce dernier problème, il m'importe peu de lire un nombre, aussi grand soit-il, sans l'explication* ad hoc. *Le plus grand soin sera accordée à la modélisation et l'explication de l'expérience. Le même soin sera apportée à la notation.*

Partie A

Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

Soient A et B les points de coordonnées $(0,0)$ et (n,p).

1. Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B.

2. On appelle chemin strictement croissant reliant A à B les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite.

   Combien y a-t-il de tels chemins ?

Partie B

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives.

De combien de façons peut-on le faire si :

3. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

4. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?

5. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

6. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?

Un biologiste, un physicien et un mathématicien sont assis à la terrasse d'un café et regardent les passants.

De l'autre côté de la rue, ils voient un homme et une femme entrer dans un immeuble. 10 minutes plus tard, ils ressortent avec une troisième personne.

- Ils se sont multipliés, dit le biologiste.

- Oh non, une erreur de mesure, s'écrie le physicien.

- S'il rentre exactement une personne dans l'immeuble, il sera de nouveau vide, conclut le mathématicien.