Bilan

Problème 1 :

1 (a) Par opérations usuelles sur les fonctions continues, φ est continue sur $]0\,;1]$.

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0 = \varphi(0)$.

La fonction φ est donc bien continue sur $[0\,;1]$.

Commentaires: *On ne prolonge pas la fonction par continuité ! Elle l'est ou elle ne l'est pas.*

(b) En tant que produit de fonctions dérivables sur $]0\,;1]$, φ y est dérivable et $\forall t \in\,]0\,;1]$, $\varphi'(t) = \ln(t) + 1$.

On en déduit le tableau de variations :

t	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

Par conséquent, $\forall t \in [0\,;1]$, $-\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \varphi(t) \leqslant 0 \iff \forall t \in [0\,;1]$, $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2 (a)
- D'après la question, 1 (a), la fonction $t \longmapsto t^n\varphi(t)$ est un produit de fonction continues sur $[0\,;1]$ donc également continue et $\displaystyle\int_0^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe d'après le théorème fondamental d'analyse.
- D'après le même théorème, comme $\alpha > 0$, la fonction $t \longmapsto t^{n+1}\ln(t)$ est continue sur $[\alpha\,;1]$ donc J_n existe.

(b) Les fonctions $t \longmapsto \ln(t)$ et $t \longmapsto \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha\,;1]$ donc on peut intégrer par parties t on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(\alpha) = \int_\alpha^1 t^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\ln(t)t^{n+2}}{n+2}\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{t^{n+1}}{n+2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(\alpha)\alpha^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{\alpha^{n+2}}{(n+2)^2}.\end{aligned}$$

Comme $n+2 >$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha^{n+2} = 0$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \ln(\alpha)\alpha^{n+2} = 0$.

D'après les propriétés algébriques des limites, on trouve donc :

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \mathrm{J}_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}.$$

Commentaires: *C'est quand même dommage que vous soyez si peu à savoir intégrer par parties. Ça interroge vraiment sur votre travail !*

(c) Comme $\alpha \leqslant 1$, il suffit d'utiliser successivement le résultat de 1 (b) et l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$\left|\int_0^\alpha t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\alpha |t^n\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\alpha |t^n|\,\frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\forall\, t\in[0\,;\alpha]\\ |t^n|\leqslant 1}}{\leqslant} \int_0^\alpha \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\mathrm{e}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha}{\mathrm{e}} = 0$, on conclut avec le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\alpha t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(d) En remarquant que $\mathrm{J}_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n(\alpha) = \int_0^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^1 t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\Big(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n(\alpha)\Big) = 0$.

Comme $\mathrm{I}_n \in \mathbb{R}$ est indépendant de α et, d'après 2 (b), $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+}\mathrm{J}_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}$.

On en déduit au final :

$$\mathrm{I}_n = \lim_{\alpha\to 0^+}\mathrm{J}_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}.$$

Commentaires: *En PTSI, nous n'avons pas les théorèmes pour nous permettre de dire que* $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{J}_n(\alpha) = \int_0^1 t^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$. *C'est pour cela que se trouve la majoration de* $\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|$ *juste avant.*

(e) $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$ terme de signe constant d'une série de Riemann convergente. D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{I}_n$ converge.

3 (a) Comme $\ln(t) \underset{t\to 1}{=} t-1$ alors $\dfrac{\varphi(t)}{1-t} = \dfrac{t\ln(t)}{1-t} \underset{t\to 1}{=} -1 = \psi(1)$. La fonction ψ, continue sur $[0\,;1[$ comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul, est également continue sur $[0\,;1]$.

Le théorème fondamental assure l'existence de l'intégrale $\mathrm{S} = \displaystyle\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$.

Le raisonnement est identique pour la fonction $t \longmapsto t^{n+1}\psi(t)$ continue sur $[0\,;1]$ et l'existence de $\mathrm{R}_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\psi(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(b) Par linéarité de l'intégrale et en reconnaissant la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n \int_0^1 t^k\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{k=1}^n t^k\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ étant correctement définies d'après la question précédente, on a :

$$= \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{S} - \mathrm{R}_n.$$

(c) Comme ψ est continue sur le segment $[0\,;1]$, le théorème des bornes atteintes d'une fonction continue sur un compact assure l'existence de $\mathrm{M} = \sup\limits_{t\in[0;1]} |\psi(t)|$.

L'inégalité triangulaire fournit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{R}_n| \leqslant \int_0^1 \left|t^{n+1}\psi(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M} \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{M}}{n+2}.$$

(d) D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |\mathrm{R}_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n+2}$.

Le théorème d'encadrement entraîne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathrm{R}_n| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0$.

Comme $\mathrm{S}_n = \mathrm{S} - \mathrm{R}_n$, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{S}$.

En conclusion, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{S}$.

4 (a) D'après 2 (b), $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = -\dfrac{1}{(n+2)^2}$.

D'où, $\displaystyle \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{\pi^2}{6}$.

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}_n = 1 - \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Il suffit simplement de réécrire ce que l'on vient de démontrer :

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{S} = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2 - 6}{6}.$$

Problème 2 :

A) Un exemple.

1 $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Donc $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(\mathrm{A})) = 1$: $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A})$ est une droite vectorielle.

2 Après calcul, $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(f^2\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \iff f^2 = f$.

Comme f est clairement linéaire, c'est un projecteur sur $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{A})$ parallèlement à $\ker\,(f) = \ker\,(\mathrm{A})$.

3 — On sait déjà que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ dont le vecteur non nul $b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ forme une base.

— $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff AX = (0)_2$

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x+2y-2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \iff x+2y-2z=0 \\
&\iff \begin{cases} x = -2y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X \in \operatorname{vect}\left(b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Les deux vecteurs b_1 et b_2 sont deux vecteurs libres et générateurs de $\ker(f)$ (il suffit de calculer $f(b_1) = f(b_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$) donc forme une base de $\ker(f)$ qui est de dimension 2 d'après le théorème du rang.

4 Comme f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, on sait que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ donc $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaires: *Si vous rechignez à utiliser vos connaissances de cours, on peut tout aussi bien commencer par montrer que $b_3 \notin \operatorname{vect}(b_1, b_2)$ ou $\det_{\mathcal{C}}(b_1, b_2, b_3) \neq 0$ puis conclure avec le théorème de la base adaptée et les dimensions mais ici ce n'est pas nécessaire.*

5 Par définition, $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

B) Une équation matricielle.

6 Soit $Y \in \operatorname{Im}(M)$. Il existe donc $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = MX$.

On a alors $(M - \alpha I)(Y) = MY - \alpha Y = M^2X - \alpha Y = \alpha(MX - Y) = 0$ *i.e.* $Y \in \ker(M - \alpha I)$.

Donc, $\operatorname{Im}(M) \subset \ker(M - \alpha I)$.

En particulier,

$$\dim(\ker(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) \geqslant \dim(\operatorname{Im}(M)) + \dim(\ker(M)) = 3,$$

d'après le théorème du rang.

$$\dim(\ker(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) \geqslant 3.$$

7 Comme $\ker(M-\alpha I)$ et $\ker(M)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$, il en est de même de $\ker(M-\alpha I)+\ker(M)$ et $\dim(\ker(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

D'après la question précédente, on en déduit que $\dim(\ker(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) = 3$.

Il suffit donc simplement de montrer que $\ker(M - \alpha I)$ et $\ker(M)$ sont en somme directe pour avoir le résultat.

Or, $X \in \ker(M - \alpha I) \cap \ker(M) \iff (M - \alpha I)X = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\iff} \alpha X = 0 \iff X = 0$.

Donc, $\ker(M - \alpha I) \oplus \ker(M) \subset \mathbb{R}^3$ et les dimensions font le reste.

$$\mathbb{R}^3 = \ker(M - \alpha I) \oplus \ker(M).$$

8 Comme M est de rang 1, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(\mathrm{M})) = 2$. Il existe donc deux vecteurs libres e_1 et e_2 tels que $\ker(\mathrm{M}) = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$.

D'après la question précédente, $\ker(\mathrm{M} - \alpha\mathrm{I})$ est donc de dimension $3 - 2 = 1$. Il existe un vecteur $e_3 \notin \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ tel que $\ker(\mathrm{M} - \alpha\mathrm{I}) = \mathrm{vect}(e_3)$.

9 Comme $\ker(\mathrm{M}) \oplus \ker(\mathrm{M} - \alpha\mathrm{I}) = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus, par définition, $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = \mathrm{M}e_3 = \alpha\mathrm{I}e_3 = e_3$.

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

10 C'est l'expression matricielle du résultat précédent. Soit $\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est inversible et, d'après les formules de changement de bases, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \left(\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

En notant, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et après produit matriciel, on a bien prouvé, pour toute matrice M de rang 1 vérifiant $\mathrm{M}^2 = \alpha\mathrm{M}$, l'existence d'une matrice inversible P telle que :

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}.$$

C) Un résultat général.

11 $\mathrm{rg}(f) \neq 0$ donc f est non nulle, ce qui justifie l'existence de e tel que $f(e) \neq 0$.

En particulier, $\dim(\mathrm{vect}(e)) = 1$.

Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{vect}(e)$.

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda \cdot e$ et $f(x) = 0 \implies \lambda \cdot \underbrace{f(e)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda = 0$.

Donc $x = 0$, $\ker(f) \cap \mathrm{vect}(e) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant claire, $\ker(f)$ et $\mathrm{vect}(e)$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^n$.

Comme f est de rang 1, le théorème du rang nous assure que $\dim(\ker(f)) = n - 1$.

On en déduit :

$$\ker(f) \oplus \mathrm{vect}(e) = \mathbb{R}^n.$$

Commentaires: *Personne ne dit que* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(e)$.

12 Comme $f^2(e) = f\Big(f(e)\Big)$, alors $f^2(e) \in \mathrm{Im}(f)$ de même que $f(e)$. Comme f est de rang 1, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et les deux vecteurs sont liés *i.e.*

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ f^2(e) = \alpha \cdot f(e).$$

13 Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

D'après la question 11, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ker(f)$ tels que $x = u + \lambda \cdot e$.

D'où, $f(x) = f(u + \lambda \cdot e) = \lambda \cdot f(e)$ puis $f^2(x) = \lambda \cdot f^2(e)$.

On conclut avec la question précédente :

$$f^2(x) = \lambda \cdot f^2(e) = \lambda \cdot (\alpha \cdot f(e)) = \alpha \cdot (\lambda \cdot f(e)) = \alpha \cdot f(u + \lambda \cdot e) = \alpha \cdot f(x).$$

Commentaires: *Honte à moi ! Nicolas et Maximilien ont fait plus court. Comme* $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{vect}(e)$*, il suffit de vérifier ce résultat sur chacun des espaces. Sur* $\ker(f)$ *c'est évident et sur* $\mathrm{vect}(e)$ *c'est la question précédente.*

14 Soit $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors,

$$f^2 = \alpha \cdot f \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(f^2\right) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)^2 = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \iff \mathrm{M}^2 = \alpha \cdot \mathrm{M}.$$

D) Synthèse et exemple.

15 Comme f est de rang 1, la question 14 montre que M, la matrice associée à f dans la base canonique, vérifie une équation de la forme $\mathrm{M}^2 = \alpha \cdot \mathrm{M}$.

Comme $\mathrm{M}^2 \neq (0)_3$, $\alpha \neq 0$ et on peut alors appliquer le raisonnement de 10 qui est le résultat demandé.

16 $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = \dim\left(\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$

De plus, $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = 3 \cdot \mathrm{M}$, donc $\alpha = 3 \in \mathbb{R}^*$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Reste à déterminer une base de $\ker(\mathrm{M})$ et $\ker(\mathrm{M} - 3\mathrm{I})$ pour avoir P.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(\mathrm{M}) \iff x + y + z = 0 \iff \ker(\mathrm{M}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(\mathrm{M} - 3\mathrm{I}) \iff \begin{cases}-2x + y + z = 0\\ x - 2y + z = 0\\ x + y - 2z = 0\end{cases} \iff \ker(\mathrm{M} - 3\mathrm{I}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Finalement, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

Problème 3 :

Partie A

1 En convenant de noter D un déplacement vers la droite et H un déplacement vers le haut, un tel chemin peut être décrit par un mot de $n+p$ lettres comportant n fois la lettre D (et p fois la lettre H).

$$\text{Donc } \binom{n+p}{n} \text{ chemins croissants de } (0,0) \text{ à } (n,p).$$

2 Si $n > p+1$, c'est impossible.

Si $n \leqslant p+1$, deux méthodes pour compter ces chemins strictement croissants :

— Deux D ne peuvent pas être consécutifs. Un D est nécessairement suivi d'un H, sauf s'il est en dernière position.

(a) Si le mot ne se termine pas par D, chaque D est suivi d'un H. On a donc n groupes de deux lettres DH. Il reste $p-n$ lettres H à placer. On doit écrire un mot constitué de $p-n$ lettres H et n blocs de DH. C'est au final un mot de p emplacements, et il reste à choisir l'endroit où on met les blocs : $\binom{p}{n}$ possibilités.

b) Si le mot se termine par D, idem, sauf qu'il y a $n-1$ blocs DH. Il reste $p-(n-1)$ lettres H à placer, soit un mot de p emplacements à nouveau (sans compter le dernier D). $\binom{p}{n-1}$ possibilités.

$$\text{Au total, on a : } \binom{p}{n} + \binom{p}{n-1} = \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$

— On peut commencer par placer les p lettres H. Comme deux D ne peuvent être consécutifs, ils doivent être placés entre ces H, ou avant ou après. $p+1$ emplacements au final.

$$\text{On retrouve les : } \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$

Partie B

3 Modélisation : chaque distribution est modélisée par un ensemble de 7 éléments : les numéros des boîtes où ont été déposés les prospectus. Par exemple, $\{1,2,3,4,7,8,10\}$ signifie que les prospectus ont été distribués dans les boîtes $1,2,3,4,7,8,10$. Il s'agit d'une combinaison de 7 éléments pris parmi 10.

$$\mathrm{C}_{10}^{7} = \binom{10}{7} = 120 \text{ façons.}$$

4 Modélisation : les prospectus étant distincts, il faut mémoriser où on a distribué le premier prospectus, le deuxième... On utilise cette fois une 7-liste. Par exemple, $(3,7,2,4,1,10,8)$ signifie que le premier prospectus a été distribué dans la boîte 3, le deuxième dans la boîte 7, etc. Comme chaque boîte ne peut recevoir plus d'un prospectus, les éléments de la liste (pris dans $[\![1,10]\!]$) sont distincts. Il s'agit d'un arrangement de 7 éléments pris parmi 10.

$$\mathrm{A}_{10}^{7} = \frac{10!}{3!} = 604\,800 \text{ façons.}$$

5 Modélisation : on compte cette fois le nombre x_k de prospectus déposés dans la boite k. La distribution est alors décrite par le 10-uplet d'entiers $(x_1, x_2, \cdots, x_{10})$ respectant $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 7$.

$$\binom{9+7}{7} = 11\,440 \text{ façons.}$$

6 Modélisation : on utilise encore une fois une 7-liste. Par exemple, $(3,7,3,3,1,10,8)$ signifie que le premier prospectus a été distribué dans la boîte 3, le deuxième dans la boîte 7, etc. Mais cette fois, une même boite peut figurer plusieurs fois. L'ensemble des possibilités est donc $[\![1,10]\!]^7$.

$$10^7 \text{ façons.}$$