Extrait de CAPES 2021

Notations et vocabulaire

— *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ par*

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

— *On dit qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,*

$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = p_k.$$

On note alors $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

— *On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ admet une espérance finie, noté $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, si la série de terme général $k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k)$ est absolument convergente et on écrit alors :*

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k).$$

— *Lorsque $\mathbb{X}^2$ admet une espérance finie, on appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel*

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\big) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

Partie A : les lois géométriques

1. Démontrer que, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2. Justifier, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   On admet que $\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

3. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

4 Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Démontrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, et une variance, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, vérifiant :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5 Soient $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{X}_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.

(a) Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ en fonction des p_i.

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie B : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

6 **Inégalité de Markov**

Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif et Ω fini,

$$\mathrm{P}(\mathbb{Y} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Y})}{a}.$$

7 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ et une variance notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$.

Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif et Ω fini,

$$\mathrm{P}(|\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X})| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathbb{X})}{a^2}.$$

Partie C : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\mathbb{T}_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.

8 En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

9 Déterminer la loi de $\mathbb{T}_1$.

10 ⓐ On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2.

Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

ⓑ En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

ⓒ En déduire la loi de $\mathbb{T}_2$ *i.e.* $\forall\, q \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 = q)$.

ⓓ On suppose que la collection contient 100 animaux.

Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieur ou égale à $0,99$.

On note $\mathbb{Z}_k$ le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

11 Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que

$$\mathbb{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{T}_1 & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1} & \text{et } k \geqslant 2. \end{cases}$$

12 En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de $\mathbb{T}_k$ en fonction des $\mathbb{Z}_i$ ou $i \in [\![1\,;n]\!]$.

13 Démontrer que $\mathbb{Z}_k$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

En déduire l'espérance et la variance de $\mathbb{Z}_k$.

14 En déduire que $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n\mathrm{H}_n$ et donner un équivalent de $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

15 On admet que les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

ⓐ Exprimer $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

ⓑ En déduire que $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

16 Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathrm{P}\big(\,|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

17 Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n \geqslant n\mathrm{H}_n + n\ln n\big) \leqslant 0,01.$$