Extrait de CAPES 2021

Partie A : les lois géométriques

1 Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathrm{S}_\mathrm{N}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} x^k$.

On reconnait la somme des N+1 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.

D'où, $\mathrm{S}_\mathrm{N}(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{\mathrm{N}+1}}{1-x}$.

Comme $|x|<1$, $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{x^{\mathrm{N}+1}}{1-x} = 0$, et la série de terme général x^k converge et on a :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[\,,\ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2 Somme de fonctions dérivable sur $]-1\,;1[$, S_N l'est également et on a :

$$\forall x \in]-1\,;1[\,,\ \mathrm{S}'_\mathrm{N}(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{((\mathrm{N}+1)(1-x)+x)}{(1-x)^2} \times x^\mathrm{N}.$$

Avec $|x|<1$, par prépondérance des fonctions puissances sur les produits,

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{((\mathrm{N}+1)(1-x)+x)}{(1-x)^2} \times x^\mathrm{N} = 0.$$

La série de terme général kx^{k-1} est donc convergente et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Commentaires: *En PTSI, on ne sait pas encore que la somme de la série dérivée est la dérivée de la somme de la série donc il fallait travailler à n fini puis passer à la limite après avoir montré l'existence des limites de part et d'autre du signe égal.*

Plus précisément, l'année prochaine vous reconnaîtrez en $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ *une série entière* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *de rayon de convergence 1 et on vous aura montré, donc vous saurez, que la série « dérivée »* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} na_n x^{n-1}$ *converge aussi avec le même rayon de convergence. Ce résultat persiste avec la série « primitive »* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *grâce au critère de D'ALembert car :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right| |x| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{a_{n+1}}{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}}\right| |x|.$$

3 Comme $p \in]0\,;1[$, il est clair que $p_k = p(1-p)^{k-1} \in [0\,;1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $p \in]0\,;1[$ alors $1-p \in]-1\,;1[$ et la suite géométrique de terme $(1-p)^{k-1}$ est donc convergente et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = p \times \frac{1}{p} = 1.$$

On a bien défini une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$.

4 Comme $p \in]0;1[$ alors $1-p \in]0;1[$.

D'après le résultat de la question 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$.

La variable $\mathbb{X}$ admet donc une espérance égale à $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = p \times \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$.

Commentaires: *On pourrait aussi directement montrer la convergence de la série par le critère de D'Alembert s'il était au programme de première année en calculant :*

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)(1-p)^k}{k(1-p)^{k-1}}\right| = 1-p < 1 \text{ et la convergence..}$$

mais on aurait aussi dû calculer la limite alors bon…

Par définition, $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\big((\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\big)$. On s'intéresse alors à l'espérance de la variable aléatoire $\mathbb{X}^2 - \dfrac{2}{p}\mathbb{X} + \dfrac{1}{p^2}$.

La question revient à prouver que $\mathbb{X}^2$ admet une espérance finie.

D'après le théorème de transfert, cela revient à prouver la convergence de la série de terme $k^2 p_k = k^2 p(1-p)^k$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, posons $x = 1-p \in]0;1[$.

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^2 x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k(k+1)x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1} = \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1}(k-1)kx^{k-2} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1}.$$

D'après les résultats de la question 2, les deux séries convergent et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1} &= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2-p}{p^3}.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \dfrac{2-p}{p^2} < +\infty$.

Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\big((\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\big) &= \mathrm{E}\left(\mathbb{X}^2 - \frac{2}{p}\mathbb{X} + \frac{1}{p^2}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \frac{2}{p}\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.\end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{X}$ admet également une variance et l'on a :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

5 (a) Par linéarité de l'espérance sur la somme finie des $\mathbb{X}_i$, on a :

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}.$$

Commentaires: *Fondamentalement, en première année, il faudrait redémontrer que l'espérance est linéaire pour un univers dénombrable non fini. Pas trop dur ici de dire que la somme de séries convergentes est une série convergente.*

(b) Les variables $\mathbb{X}_i$ étant mutuellement indépendantes, on a :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}\left(\mathbb{X}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_1}{p_1^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}.$$

Commentaires: *Même remarque que ci-dessus. Par contre, il n'y pas lieu de se poser la question de la convergence pour* $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i$ *car, n est fixé et la somme finie Seule la linérité de la somme intervient.*

Partie B : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

6 **Inégalité de Markov :** *cf.* cours.

Commentaires: *En PTSI, nous n'avons pu montrer ce résultat que sur un univers fini. L'année prochaine, vous ferez de même sur un univers dénombrable. Ce n'est pas plus difficile.*

7 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** *cf.* cours.

Commentaires: *Même remarque.*

Partie C : le problème du collectionneur

8 D'après l'énoncé, il y a n vignettes différentes. La variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection est $\mathbb{T}_n$.

9 Le support de la variable aléatoire $\mathbb{T}_1$ ne comporte qu'un élément 1 qui correspond à l'unique image qu'il aura après une seule tablette et on a $\mathrm{P}(\mathbb{T}_1=1)=1$.

Donc,

$\mathbb{T}_1$	1
$\mathrm{P}(\mathbb{T}_1=t)$	1

10 (a) Les animaux étant répartis de manière équiprobables, la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats est donc égale à $\dfrac{1}{n^{q-1}}$.

(b) L'événement $(\mathbb{T}_2>q)$ signifie que la première fois que le collectionneur a obtenu deux animaux différents s'est produite après strictement plus de q achats. Événement identique à celui de toujours obtenir le même animal au cours des q premiers achats soit :

$$\mathrm{P}(\mathbb{T}_2>q)=\frac{1}{n^{q-1}}.$$

(c) $\forall\, q\geqslant 2,\ \mathrm{P}(\mathbb{T}_2=q)=\mathrm{P}(\mathbb{T}_2>q-1)-\mathrm{P}(\mathbb{T}_2>q)=\dfrac{1}{n^{q-2}}-\dfrac{1}{n^{q-1}}=\dfrac{n-1}{n^{q-1}}.$

(d) La question revient à chercher $q\geqslant 2$ tel que :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathbb{T}_2\leqslant q)\geqslant 0,99 \iff 1-\mathrm{P}(\mathbb{T}_2>q)\geqslant 0,99 &\iff 1-\frac{1}{100^{q-1}}\geqslant 0,99\\ &\iff \frac{1}{100}\geqslant\frac{1}{100^{q-1}} \iff 100^{q-1}\geqslant 100\\ &\iff 100^{q-2}\geqslant 1 \iff q\geqslant 2.\end{aligned}$$

Le nombre minimal d'achats est donc 2.

11 Ôté le cas dégénéré $\mathbb{Z}_1=\mathbb{T}_1$, par définition de $\mathbb{Z}_k$, on a $\mathbb{Z}_k=\mathbb{T}_k-\mathbb{T}_{k-1}$ si $k>1$.

12 Par télescopage, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_k = \mathbb{T}_1 + \sum_{k=2}^{n} (\mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1}) = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_n - \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_n.$$

Donc, $\forall\, k \geqslant 2$, $\mathbb{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_k$.

13 Lorsque le collectionneur à $k-1$ animaux différents, la probabilité qu'il en obtienne un différent est de $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$, celle d'en obtenir un qu'il a déjà de $\frac{k-1}{n}$.
Ainsi, pour qu'il en obtienne 1 différent au bout de q achats, il faut et il suffit qu'il échoue à cela $q-1$ fois avec la probabilité $\left(\frac{k-1}{n}\right)^{q-1}$ et qu'il réussisse à la q-ième tentative avec la probabilité $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$.
On obtient donc, $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_k = q) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{q-1} = p(1-p)^{q-1}$ avec $p = 1 - \frac{k-1}{n} \in \,]0\,;1[$ car $2 \leqslant k \leqslant n$.
La variable $\mathbb{Z}_k$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{k-1}{n} = \frac{n-k+1}{n}$.
D'après la question 4, on a alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1}.$$

$$\mathrm{V}(\mathbb{Z}_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}.$$

14 Par linéarité de l'espérance, on en déduit que :

$$\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathbb{Z}_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} \underset{l=n-k+1}{=} n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} = n\mathrm{H}_n.$$

On en déduit que $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

15 (a) Comme les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(\mathbb{Z}_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2} \underset{l=n-k+1}{=} n \sum_{l=1}^{n} \frac{n-l}{l^2} \\ &= n^2\mathrm{B}_n - n\mathrm{H}_n.\end{aligned}$$

(b) Comme, $n\mathrm{H}_n > 0$, $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant n^2\mathrm{B}_n$.
La suite $(n^2\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, produit d'une suite croissante et d'une série à termes positifs est croissante vers sa limite $\frac{n^2\pi^2}{6}$ donc

$$\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

16 Pour $n \geqslant 2$, $a = \lambda n \ln n > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors :

$$\mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathbb{T}_n)}{\lambda^2 n^2 (\ln n)^2} \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6\lambda^2 n^2 (\ln n)^2} = \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

17 Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant n \ln n\big) = \mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \geqslant n \ln n\big) + \underbrace{\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \leqslant -n \ln n\big)}_{\geqslant 0}.$$

Donc, $\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \geqslant n \ln n\big) \leqslant \mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant n \ln n\big)$.
Il suffit donc de chercher un entier n tel que $\mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant n \ln n\big) \leqslant 0,01$.
Pour cela, appliquons la majoration de la question précédente avec $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant 0,01 &\impliedby \frac{\pi^2}{6(\ln n)^2} \leqslant 0,01 \\ &\impliedby n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{100}\pi}{\sqrt{6}}} = \mathrm{e}^{\frac{10\pi}{\sqrt{6}}} \\ &\impliedby n \geqslant 371572,1. \end{aligned}$$

Donc $n_0 = 371\,573$. Ça fait beaucoup de chocolat !