Fonctions à plusieurs variables - PT 2019

Partie I

1 On résout un système de la forme $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ou par opérations sur les lignes pour trouver que M est bien inversible et que l'on a :

$$M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-3&3\\-3&-1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$$

Commentaires:

— *Concluez d'abord à l'inversibilité de M avant de parler de M^{-1}.*

— *Quelle que soit la manière dont vous trouvez l'inverse, faites-le certes mais dites-le aussi.*

2 a) Par simples calculs, on trouve successivement :

$$N^2=\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\-3&4&-3&3\\0&0&1&0\\-3&3&-3&4\end{pmatrix},\quad \text{puis}\quad N^2+2I=\begin{pmatrix}0&3&-3&3\\-3&6&-3&3\\0&0&3&0\\-3&3&-3&6\end{pmatrix}=3N,$$

$$\text{et}\qquad N^2-3N+2I=0.$$

Commentaires: *Le polynôme X^2-3X+2 est dit annulateur de N.*

b) D'après la question précédente, $N^2-3N+2I=0 \iff N\times\left(-\frac{1}{2}(N-3I)\right)=I.$

La matrice N est donc inversible d'inverse $N^{-1}=-\frac{1}{2}(N-3I)$.

3 a) i. La formule, dite de Laplace, de développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det(A_{i,j}).$$

ii. Le déterminant de B est nul car B possède deux colonnes identiques.

En développant $\det(B)$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne, on obtient la relation demandée car $b_{i,j}=a_{i,j'}$ et $B_{i,j}=A_{i,j}$.

b) i. $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$.

ii. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Le terme de place (i,j) de BA vaut, d'après les questions ??.

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{k,j}\det(A_{k,i})=\begin{cases}\det(A) & \text{si } i=j,\\ 0 & \text{si } i\neq j,\end{cases}$$

d'où le résultat.

iii. Si A est inversible, $\det(A) \neq 0$ donc $\left(\dfrac{1}{\det A}B\right) \times A = I_n$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}B$.

Commentaires: *La matrice B s'appelle la transposée de la comatrice de A et on retient souvent ce résultat, quand il était au programme en tout cas, sous la forme :*

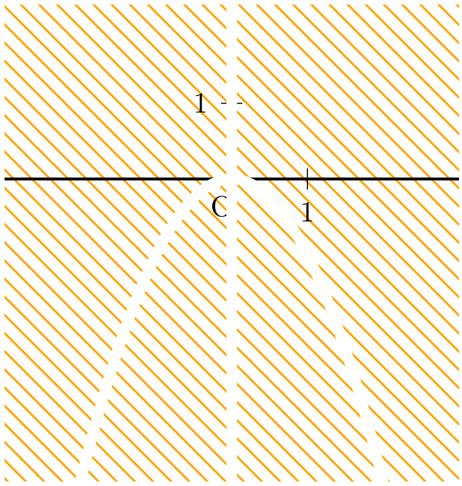
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A).$$

4 a) On a

$$\det(A(u,v)) \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -u & uv & u^2 - v \\ -1 & v & 2u \\ 0 & u & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -u^2 - v \\ -1 & v & 2u \\ 0 & u & -1 \end{vmatrix}$$
$$= u^3 + uv,$$

Donc, $\det(A(u,v)) = 0 \iff u = 0 \text{ ou } v = -u^2$.

On en déduit que D est le plan privé de la réunion de l'axe des ordonnées et de la parabole d'équation $v = -u^2$.



Commentaires: *Il n'est pas trop difficile de montrer que D est un ouvert mais bon.*

b) Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, la matrice B (« transposée de la comatrice » de $A(u,v)$) vaut

$$B = \begin{pmatrix} -v - 2u^2 & u^3 & (u^2+v)\,v \\ 2u^2 + v - 1 & u - u^3 & (u^2+v)(1-v) \\ -u & u^2 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $$A(u,v)^{-1} = \frac{1}{u(u^2+v)} \begin{pmatrix} -v - 2u^2 & u^3 & (u^2+v)\,v \\ 2u^2 + v - 1 & u - u^3 & (u^2+v)(1-v) \\ -u & u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II

1 a) Si on note $M = M(u,v)$ le point de S de paramètres u et v, on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} \wedge \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - 2u^2 \\ -2u \\ 2u^2 \end{pmatrix}.$$

Les points singuliers de S sont ceux pour lesquels $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$, ce qui conduit à $u = v = 0$.

Seul le point $M(0,0) = O$ est singulier.

(b) En tout point régulier M de S, le vecteur $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ non nul est normal à S en M, donc une équation cartésienne du plan tangent est :

$$\left(v-2u^2\right)\left(x-u^2\right)-2u(y-uv)+2u^2\left(z-u^2-v\right)=0 \iff \left(v-2u^2\right)x-2uy+2u^2z=u^2v.$$

Commentaires: *Bien faire apparaître que le plan tangent n'existe que parce qu'on est en un point régulier où le vecteur* $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ *est non nul .*

2 (a) Le plan $\mathrm{P}_{u,v}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{N}}(u,v)$ de coordonnées $(a(u,v),b(u,v),c(u,v))$. Il est donc sous-entendu que pour tout $(u,v)\in\mathrm{U}$, ce vecteur est non nul, sans quoi $\mathrm{P}_{u,v}$ n'est pas un plan.

Il suffit simplement de traduire ce qu'est le plan tangent à Σ en $\mathrm{M}\,(u\,;v)$: le plan passant par $\mathrm{M}(u,v)$ et dirigé par les deux vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, qui sont non colinéaires (car Σ est supposée régulière) *i.e.* $\mathrm{M}\,(u\,;v)\in\mathrm{P}_{u,v}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ est orthogonal à $\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ce qui s'écrit :

$$\begin{cases}\mathrm{M}(u,v)\in\mathrm{P}_{u,v}\\ \langle\overrightarrow{\mathrm{N}}(u,v),\dfrac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rangle=0\\ \langle\overrightarrow{\mathrm{N}}(u,v),\dfrac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\rangle=0\end{cases}\iff\begin{cases}(\mathrm{Eq}_1)\\(\mathrm{Eq}_2)\\(\mathrm{Eq}_3)\end{cases}$$

(b) Si (S_1) est vérifié, alors en dérivant (Eq_1) par rapport à u, on obtient que $(\mathrm{Eq}_2)+(\mathrm{Eq}_4)$ est vérifiée, et comme (Eq_2) est vérifiée, on en déduit que (Eq_4) aussi. Idem pour (Eq_5) en dérivant cette fois (Eq_1) par rapport à v.

Réciproquement, si (S_2) est vérifié, on dérive encore (Eq_1) par rapport à u et on obtient que (Eq_2) est vérifiée, et de même pour (Eq_3) en dérivant par rapport à v.

Les deux systèmes (S_1) et (S_2) sont donc équivalents.

3 (a) La matrice du système (S_3) est ici

$$\mathrm{A}(u,v)=\begin{pmatrix}2u^2+v & 1-\left(2u^2+v\right) & u\\ 4u & -4u & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \det\left(\mathrm{A}(u,v)\right)\underset{\mathrm{C}_2\leftarrow\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_1}{=}\begin{vmatrix}2u^2+v & 1 & u\\ 4u & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

donc $\mathrm{A}(u,v)$ est inversible, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ *i.e.* (S_3) admet une unique solution pour tout $(u\,;v)\in\mathbb{R}^2$.

(b) On peut résoudre le système « à la main » (c'est le plus rapide ici) ou bien appliquer la méthode de la partie I : Comme $\det\left(\mathrm{A}(u,v)\right)=1\neq0$, la matrice A est inversible et la matrice B associée à la matrice $\mathrm{A}(u,v)$ est

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & -u & 1+2u^2-v\\ 1 & -u & 2u^2-v\\ 0 & 1 & -4u\end{pmatrix}=\mathrm{A}(u,v)^{-1}.$$

Ainsi,

$$(\mathrm{S}_3)\iff\mathrm{A}(u,v)\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\\\mathrm{Z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}uv+u^3\\ v+3u^2\\ u\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\\\mathrm{Z}\end{pmatrix}=\mathrm{A}(u,v)^{-1}\begin{pmatrix}uv+u^3\\ v+3u^2\\ u\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}u-uv\\ -uv\\ v-u^2\end{pmatrix}$$

c) On a obtenu la représentation paramétrique de Σ suivante :

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = -uv \\ z = v - u^2 \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \frac{\partial}{\partial v}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} 1-v \\ -v \\ -2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u^2 - v \\ 2u^2 + v - 1 \\ -u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a(u,v) \\ b(u,v) \\ c(u,v) \end{pmatrix},$$

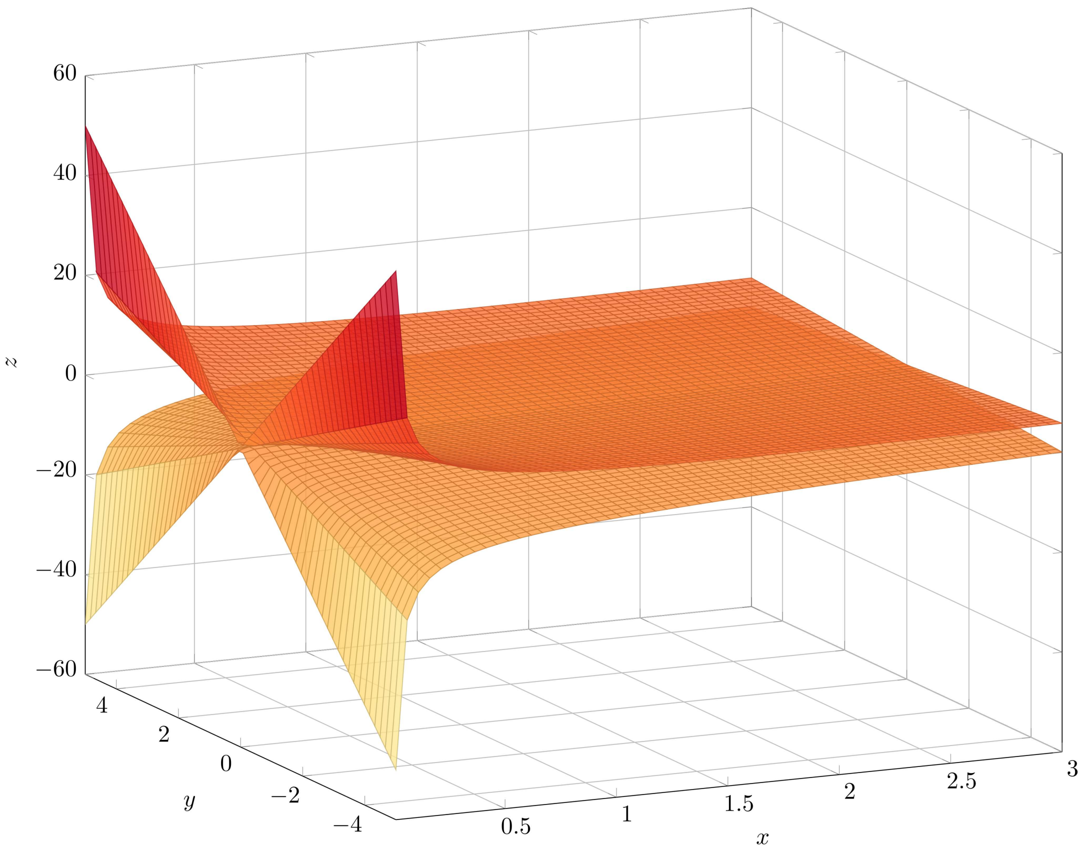
vecteur qui ne peut être nul. La surface Σ obtenue est donc régulière.

4 Ici, la matrice du système (S_3) est la matrice $\mathrm{A}(u,v)$ de la question I. **??**, donc le système est inversible si, et seulement si $(u,v) \in \mathrm{D}$, et dans ce cas,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}_3) \iff \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} &= \mathrm{A}(u,v)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u\left(u^2+v\right)} \begin{pmatrix} -v - 2u^2 & u^3 & \left(u^2+v\right)v \\ 2u^2 + v - 1 & u - u^3 & \left(u^2+v\right)(1-v) \\ -u & u^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u\left(u^2+v\right)} \begin{pmatrix} -u^2 v \\ u^2 + u^2 v \\ -uv \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2+v} \begin{pmatrix} -uv \\ u + uv \\ -v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de Σ est donc

$$\begin{cases} x = \dfrac{-uv}{u^2+v} \\ y = \dfrac{u+uv}{u^2+v} \\ z = \dfrac{-v}{u^2+v} \end{cases}, (u,v) \in \mathrm{D}.$$


60
40
20
0
−20
−40
−60
z
4
2
0
−2
−4
y
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x