Fonctions à plusieurs variables - PT 20??

Notations et définitions :

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*. On s'intéresse, dans ce devoir, à une surface paramétrée* $f : \mathrm{U} \longmapsto \mathbb{R}^3$ *de l'espace.*

Point régulier : *On dit qu'un point* $\mathrm{M}(u_0, v_0)$ *de la surface paramétrée est* régulier *si les vecteurs* $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, \nu_0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \nu_0)$ *ne sont pas colinéaires.*

Dans le cas contraire, on dit que le point $\mathrm{M}(u_0, \nu_0)$ *est* stationnaire *(ou* singulier*).*

Plan tangent en un point régulier : *On appelle* ***plan tangent*** *à la surface paramétrée en un point régulier* $\mathrm{M}(u_0, v_0)$ *le plan passant par* $\mathrm{M}(u_0, v_0)$ *et dirigé par les vecteurs* $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial \nu}(u_0, v_0)$*.*

Partie I

Soit n *un entier naturel plus grand ou égal à 2. On note* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées à* n *lignes et* n *colonnes et à coefficients dans* $\mathbb{R}$*.*

1 Un exemple.

Calculer l'inverse de la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Un deuxième exemple.

On considère la matrice $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\mathrm{N}^2 - 3\mathrm{N} + 2\mathrm{I}$ où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

b) En déduire que N est inversible et donner l'expression de N^{-1} en fonction de I et N.

3 Cas général.

On considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, on note $\mathrm{A}_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de la matrice A dans laquelle on a supprimé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Ainsi, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) i. Rappeler la formule permettant de calculer le déterminant de la matrice A en le développant par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne.

ii. Soit $(j, j') \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$ tel que $j \neq j'$. En considérant la matrice B qui a les mêmes colonnes que A sauf la $j^{\text{ème}}$ colonne de B qui est égale à la $j'^{\text{ème}}$ de A, justifier que :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(\mathrm{A}_{i,j}) = 0.$$

(b) Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathrm{BA} = \mathrm{C} = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

i. Rappeler l'expression de $c_{i,j}$ en fonction des coefficients des matrices A et B.

ii. On choisit $\forall\,(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, $b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\mathrm{A}_{j,i})$.

Démontrer que $\mathrm{BA} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

iii. En déduire, lorsque A est inversible, l'inverse de A en fonction de B.

4 Application.

Soit $(u\,;v) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $\mathrm{A}(u\,;v) = \begin{pmatrix} uv-u & uv & u^2-v \\ v-1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer et représenter sur la copie, le domaine D (le plus grand possible) pour que la matrice $\mathrm{A}(u\,;v)$ soit inversible pour tout $(u\,;v) \in \mathrm{D}$.

On admettra que D est un ouvert.

(b) Calculer $\mathrm{A}(u\,;v)^{-1}$ pour tout $(u\,;v) \in \mathrm{D}$.

Partie II

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 On considère la surface S paramétrée par $\begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = u^2+v \end{cases}$, $(u\,;v) \in \mathbb{R}^2$ *i.e.* la surface définie par la fonction $f :\ \begin{array}{ccc} \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (u\,;v) & & \left(u^2\,;uv\,;u^2+v\right). \end{array}$

(a) Déterminer l'ensemble des points non réguliers de S.

(b) Donner une équation cartésienne du plan tangent à S en tout point régulier de S.

Dans la suite de cette partie, U *désigne un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* a, b, c *et* d *quatre fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U.

On considère la famille de plans $(\mathrm{P}_{u,v})_{(u;v)\in\mathrm{U}}$ *d'équation cartésienne :*

$$a(u;v)\,x + b(u;v)\,y + c(u;v)\,z = d(u;v)\,.$$

L'objectif est de déterminer une surface Σ *dont l'ensemble des plans tangents est la famille* $(\mathrm{P}_{u,v})_{(u;v)\in\mathrm{U}}$.

Pour cela, on considère un paramétrage régulier $(u;v)\in\mathrm{U}\longmapsto \mathrm{M}(u;v) = \big(x(u;v), y(u;v), z(u;v)\big)$ *de la surface* Σ *tel que pour tout* $(u;v)\in\mathrm{U}$*, le plan tangent à* Σ *au point* $\mathrm{M}(u;v)$ *est le plan* $\mathrm{P}_{u,v}$.

2 Cas général.

a) Démontrer que la surface Σ convient si, et seulement si :

$$\forall\,(u;v)\in\mathrm{U},\ \left\{\begin{array}{rcll} a(u;v)\,x(u;v)+b(u;v)\,y(u;v)+c(u;v)\,z(u;v) & = & d(u;v) & (\mathrm{Eq}_1)\\ a(u;v)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u;v)+b(u;v)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u;v)+c(u;v)\dfrac{\partial z}{\partial u}(u;v) & = & 0 & (\mathrm{Eq}_2)\\ a(u;v)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u;v)+b(u;v)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u;v)+c(u;v)\dfrac{\partial z}{\partial v}(u;v) & = & 0 & (\mathrm{Eq}_3)\end{array}\right.$$

On note (S_1) ce système.

b) Démontrer soigneusement que le système (S_1) est équivalent au système (S_2) :

$$\forall\,(u;v)\in\mathrm{U},\ \left\{\begin{array}{rcll} a(u;v)\,x(u;v)+b(u;v)\,y(u;v)+c(u;v)\,z(u;v) & = & d(u;v) & \\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u;v)\,x(u;v)+\dfrac{\partial b}{\partial u}(u;v)\,y(u;v)+\dfrac{\partial c}{\partial u}(u;v)\,z(u;v) & = & \dfrac{\partial d}{\partial u}(u;v) & (\mathrm{Eq}_4)\\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u;v)\,x(u;v)+\dfrac{\partial b}{\partial v}(u;v)\,y(u;v)+\dfrac{\partial c}{\partial v}(u;v)\,z(u;v) & = & \dfrac{\partial d}{\partial v}(u;v) & (\mathrm{Eq}_5)\end{array}\right.$$

On note alors (S_3) le système :

$$\forall\,(u;v)\in\mathrm{U},\ \left\{\begin{array}{rcl} a(u;v)\,\mathrm{X}+b(u;v)\,\mathrm{Y}+c(u;v)\,\mathrm{Z} & = & d(u;v)\\ \dfrac{\partial a}{\partial u}(u;v)\,\mathrm{X}+\dfrac{\partial b}{\partial u}(u;v)\,\mathrm{Y}+\dfrac{\partial c}{\partial u}(u;v)\,\mathrm{Z} & = & \dfrac{\partial d}{\partial u}(u;v)\\ \dfrac{\partial a}{\partial v}(u;v)\,\mathrm{X}+\dfrac{\partial b}{\partial v}(u;v)\,\mathrm{Y}+\dfrac{\partial c}{\partial v}(u;v)\,\mathrm{Z} & = & \dfrac{\partial d}{\partial v}(u;v)\end{array}\right.$$

3 Une première application.

Dans cette question, $\mathrm{U}=\mathbb{R}^2$ et a, b, c sont les fonctions :

- $a : (u;v)\longmapsto 2u^2+v$,
- $b : (u;v)\longmapsto 1-\left(2u^2+v\right)$,
- $c : (u;v)\longmapsto u$,
- $d : (u;v)\longmapsto uv+u^3$.

a) Vérifier que le système (S_3) admet une unique solution pour tout $(u;v)\in\mathbb{R}^2$.

b) Résoudre (S_3).

c) Vérifier que la paramétrage ainsi trouvé est régulier.

4 Une deuxième application.

Dans cette question, a, b, c et d sont les fonctions :

- $a : (u\,; v) \longmapsto uv - u$,
- $b : (u\,; v) \longmapsto uv$,
- $c : (u\,; v) \longmapsto u^2 - v$,
- $d : (u\,; v) \longmapsto v$.

À l'aide de la partie **I.**, donner un paramétrage de la surface Σ qui convient.