Logique & Raisonnement

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est strictement décroissante ;
7. f est croissante ;
8. f est la fonction nulle ;
9. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
10. f est inférieure à g ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 : En utilisant convenablement les quantificateurs, énoncer le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.

Exercice 3 : Soient les nombres réels x_1, x_2, ..., x_n. Traduire en langage formalisé les phrases suivantes :

1. Les x_i sont tous nuls
2. L'un des x_i est nul
3. Les x_i sont non tous nuls
4. Les x_i sont tous non nuls
5. Les x_i sont égaux
6. 2 au moins parmi les x_i sont égaux
7. 2 au moins parmi les x_i sont distincts
8. Les x_i sont tous distincts

Exercice 4 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 5 : Dans l' exercice (3) , quelles sont les assertions contraires l'une de l'autre ?

Exercice 6 : Compléter les phrases suivantes par « il faut », « il suffit », ou « il faut et il suffit »pour obtenir des affirmations correctes, puis écrire ces phrases à l'aide d'implications ou d'équivalences.

1. $x \in \mathbb{R}$, pour que $x > 4, \dots\dots\dots$ que $x \geqslant 4$.
2. $x \in \mathbb{R}$, pour que $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ soit défini ....que x soit différent de 3 .
3. Soit $u_n > 2^n$, pour que $u_n > 1000 \dots\dots\dots\dots 2^n > 1000$.
4. Pour être divisible par 6 .... qu'un nombre soit divisible par 3.

Exercice 7 :

1. Montrer que les assertions $(\mathscr{P} \vee \mathscr{Q})$ et $(\rceil\mathscr{P} \implies \mathscr{Q})$ sont équivalentes.
2. **Application :** Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\max\left\{x^2,\, (x-2)^2\right\} \geqslant 1$.

Exercice 8 :

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x+6} = x$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $x(x+1)(2x+1) = 84$.

Exercice 9 : Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_n est majorée par 3.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
5. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7^n - 1$ est divisible par 6.
6. $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + 3n(n+1)$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 6.

Exercice 10 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Correction : *On montre ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.*

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = 3^1 - 2^2$ donc la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $u_k = 3^k - 2^{k+1}$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+2}$ (et seulement pour ce k).

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$$\begin{aligned} u_{k+2} &= 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+1} - 2^{k+2}) - 2 \times 3(3^k - 2^{k+1}) \\ &= 3^{k+1}(5-2) - 2^{k+2}(5-3) = 3^{k+2} - 2^{k+3}. \end{aligned}$$

La relation est donc vraie pour $k+2$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée à partir de $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Exercice 12 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Correction : *Pour l'hérédité,*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = n^2 + 2(n-1)\frac{n-1}{n+1} \\ &\leqslant n^2 + 2(n-1) = n^2 + 2n + 1 - 3 \leqslant (n+1)^2. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}{n+1} \leqslant \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n+1} = (n+1)^3. \end{aligned}$$

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 15 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2).$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

Exercice 16 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geqslant 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n u_0$.

Exercice 17 : Dans l'école dont vous rêvez, l'enseignement de logique est dispensé par trois professeurs. Les examens de fin de semestre se composent de plusieurs problèmes, qui ne sont pas nécessairement tous à traiter. Avant tout examen, chaque professeur donne une consigne concernant ce qu'il faut traiter, mais l'un d'eux ment, les deux autres disent vrai.

Attention, d'un examen à l'autre, le menteur n'est pas toujours le même !

On note $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ et A_3 les assertions traduisant les affirmations (dans l'ordre donné) des trois professeurs.

1. Écrire une formule F traduisant la règle « un professeur ment, les deux autres disent vrai» à l'aide de connecteurs logiques.
2. Pour l'examen du premier semestre, il y a deux problèmes notés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Voici les consignes des trois professeurs :

   professeur 1 : «Si $\mathcal{P}$ est à traiter, alors $\mathcal{Q}$ aussi ».
   professeur 2 : « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont à traiter ».
   professeur 3 : « $\mathcal{Q}$ est à traiter»

   On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) la proposition « le problème $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) est à traiter» .

   a. Exprimer $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ et A_3 à l'aide de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et d'opérateurs logiques.
   b. Dire le ou les problèmes à traiter
3. Pour l'examen du deuxième trimestre, il y a trois problèmes $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$. Voici les trois consignes :

   professeur 1 : « il est faux que si $\mathcal{P}$ est à traiter, alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi».
   professeur 2 : « $\mathcal{Q}$ est à traiter, mais pas $\mathcal{R}$ ».
   professeur 3 : « un seul sujet est à traiter, et ce n'est pas $\mathcal{Q}$ »

   a. Exprimer $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ et A_3 à l'aide de $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.
   b. Dire le ou les problèmes à traiter.