Types de raisonnement

Exercice 1 :

1. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, y, z \geqslant 0$:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$

3. En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Exercice 2 : Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine, et d'une fonction s'annulant en -1 et 1.

Exercice 3 : Montrer par une récurrence forte, que pour tout naturel n non nul, il existe un unique couple $(p\,;q)$ d'entiers naturels tel que $n = 2^p \times (2q+1)$.

Aide : On démontrera l'existence et l'unicité d'un tel couple séparément.

Problème 4 : Dans ce problème, on définit la relation « être amoureux », notée $m \heartsuit m'$ pour signifier que m aime m'.

On notera également, $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes.

Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$ et $m \not\heartsuit m'$ signifiera que m n'aime pas m'.

À titre d'exemple, la phrase « chaque homme est amoureux d'une femme » où nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f, s'écrit :

$$\forall\, h \in \mathcal{H},\ \exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f.$$

Remarque : On rappelle qu'en mathématiques, « une » signifie « au moins une », et non pas « exactement une » et on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

1. **Thème :** Écrire les assertions suivantes sous forme de formules mathématiques :

   a) Tous les hommes aiment toutes les femmes.
   b) Chaque femme aime un unique homme.
   c) Certaines femmes aiment deux hommes.
   d) Il existe une femme amoureuse d'elle-même.
   e) Tout le monde aime tout le monde.
   f) Certains hommes aiment un homme ou une femme.

2 **Version :** Que signifient les assertions suivantes ?

(a) $\exists f \in \mathcal{F},\ \forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f$.
(b) $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f$.
(c) $\exists f \in \mathcal{F},\ \forall h \in \mathcal{H}, f \not\heartsuit h$.
(d) $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit f \wedge f \heartsuit h)$.
(e) $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F},\ (h \heartsuit f \wedge f \not\heartsuit h)$.
(f) $\forall h \in \mathcal{H}, ((\exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f) \wedge (\exists f \in \mathcal{F},\ f \heartsuit h))$.

3 **Négations :** *On introduit à présent deux femmes, Brenda et Juliette, et deux hommes, Mike et Roméo. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale.*

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes en quantificateurs.

(a) Brenda aime Mike et Roméo.
(b) Tous les hommes aiment Juliette ou Brenda.
(c) Juliette n'aime aucun homme.
(d) Brenda aime une femme.
(e) Certains hommes aiment Brenda et Juliette.
(f) Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Juliette.

4 **Implications :**

(a) Traduire en formules mathématiques les assertions suivantes :

i. Juliette aime tous les hommes qu'aime Brenda.
ii. Roméo n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Juliette.
iii. Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Juliette.

(b) Que signifient les assertions suivantes ?

i. $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit \mathrm{M} \implies \mathrm{M} \not\heartsuit f$.
ii. $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit \mathrm{M}) \implies (\forall f \in \mathcal{F}, \mathrm{M} \not\heartsuit f)$.
iii. $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit \mathrm{B} \implies \mathrm{J} \not\heartsuit h$.
iv. $\forall h \in \mathcal{H}, \mathrm{J} \heartsuit h \implies h = \mathrm{M}$
v. $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \implies h \heartsuit \mathrm{J}$.
vi. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F},\ h \heartsuit f) \implies h \heartsuit \mathrm{J}$.

5 **Négations d'implications :** Écrire la négation des assertions de la question **4**.

ATTENTION La négation d'implications est celle qui pose le plus de problèmes à la plupart des étudiants alors faites attention !