

Types de raisonnement

Commentaires : N'utilisez pas le symbole \Leftrightarrow à tort et à travers en début de phrases. Ce n'est pas une conjonction.

Exercice 1 :

1 Pour tous $x, y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y \Leftrightarrow x + 2\sqrt{xy} + y \leq 2(x + y) \\ &\Leftrightarrow (0 \leq) (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2} \sqrt{x + y}. \end{aligned}$$

Commentaires : Pour certains, c'est quand même bizarre de supposer le contraire d'une inégalité, écrire donc 10 lignes fausses pour aboutir à un résultat faux et conclure au contraire. Autant partir d'inégalités vraies non ?

Pour les autres, les raisonnements par équivalence partant du résultat sont tout d'abord moches mais vous font recopier une série de lignes dont vous ne connaissez la véracité qu'à la fin. En substance, vous aurez donc écrit 10 lignes potentiellement fausses pour une seule correcte. Le ratio n'est pas votre avantage.

2 Il suffit d'appliquer plusieurs fois la relation précédente : Pour tous $x, y, z \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \sqrt{2} \sqrt{x + y} \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} &\leq \sqrt{2} \sqrt{y + z} \\ \sqrt{z} + \sqrt{x} &\leq \sqrt{2} \sqrt{z + x} \end{aligned}$$

En sommant membre à membre ces inégalités positives et dans le même sens,

$$2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{2} \sqrt{x + y} + \sqrt{2} \sqrt{y + z} + \sqrt{2} \sqrt{z + x}$$

Il n'y a plus qu'à simplifier par 2 pour obtenir :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{x + y}{2}} + \sqrt{\frac{y + z}{2}} + \sqrt{\frac{z + x}{2}}.$$

3 Si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque, l'inégalité triangulaire nous permet d'affirmer que $x = a + b - c$, $y = b + c - a$ et $z = c + a - b$ sont tous trois positifs et, d'après l'inégalité précédente on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} &\leq \sqrt{\frac{a + b - c + b + c - a}{2}} + \sqrt{\frac{b + c - a + c + a - b}{2}} \\ &\quad \dots + \sqrt{\frac{c + a - b + a + b - c}{2}} \\ &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Ne sachant pas du tout à quoi pourraient ressembler les fonctions cherchées on va mener un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que $f = g + h$ où g est une fonction affine de la forme

$$g : x \mapsto g(x) = mx + p$$

et h telle que $h(1) = h(-1) = 0$.

Trouver g revient à déterminer les coefficients m et p .

Or, en évaluant en 1 et -1 , on obtient :

$$\begin{cases} f(1) &= m + p \\ f(-1) &= -m + p \end{cases} \iff \begin{cases} m &= \frac{f(1) - f(-1)}{2} \\ p &= \frac{f(1) + f(-1)}{2} \end{cases}$$

Nécessairement,

- $g : x \mapsto \frac{f(1) - f(-1)}{2} x + \frac{f(1) + f(-1)}{2}$.
- $h = f - g$.

Synthèse : Considérons les fonctions g et h définies comme ci-dessus alors :

- Par construction, $f = g + h$.
- g est bien une fonction affine qui vérifie, en particulier, $g(1) = f(1)$ et $g(-1) = f(-1)$.
- $h = f - g$ vérifie $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - f(1) = 0$ et $h(-1) = f(-1) - g(-1) = 0$.

On a donc montré que toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine, et d'une fonction s'annulant en -1 et 1 .

Remarque : Par construction, cette décomposition est, de plus, unique.

Commentaires : *Le raisonnement par analyse-synthèse est un raisonnement par condition nécessaire. Il faut donc vérifier que les conditions trouvées sont suffisantes. On ne peut donc se passer de la synthèse.*

Exercice 3 : Posons $\mathcal{P}(n) : \exists ! (p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2 / n = 2^p(2q + 1)$ et montrons, par récurrence forte, que pour tout naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ donc le couple $(0; 0)$ convient et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier non nul n tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

Commentaires : *Pour la récurrence forte, on suppose qu'il existe un entier n tel que pour tous les entiers inférieurs, la propriété soit vraie.*

- Si n est pair alors il existe un entier naturel q tel que $n = 2q$.
D'où $n + 1 = 2q + 1 = 2^0(2q + 1)$ et le couple $(0; q)$ convient.
- Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et il existe donc un entier $p' \leq n$ tel que $n + 1 = 2p'$.
Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire p' sous la forme $p' = 2^p(2q + 1)$ et obtenir $n + 1 = 2^{p+1}(2q + 1)$.

Dans tous les cas, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée et la propriété est héréditaire.

Synthèse : Initialisée pour $n = 1$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit n entier naturel non nul.

Pour montrer que le couple $(p; q)$ d'entiers tel que $n = 2^p(2q + 1)$ est unique on suppose l'existence d'un deuxième couple $(p'; q')$ vérifiant les mêmes propriétés. On peut même supposer que $p \geq p'$ sans perte de généralités. On a alors,

$$2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1) \iff 2^{p-p'}(2q + 1) = 2q' + 1.$$

Le membre de gauche ne peut être un nombre impair que si $p = p'$.

L'équation se réduit alors à $2q + 1 = 2q' + 1 \iff q = q'$. Le couple $(p; q)$ est donc unique.

En conclusion, tout entier naturel non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q + 1)$ avec $(p; q) \in \mathbb{N}^2$.

Problème 4 :

1 **Thème** :

- (a) $\forall h \in \mathcal{H}, \forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f.$
- (b) $\forall f \in \mathcal{F}, \exists ! h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h.$
- (c) $\exists f \in \mathcal{F}, \exists (h_1; h_2) \in \mathcal{H}^2, (h_1 \neq h_2) \wedge (f \heartsuit h_1 \wedge f \heartsuit h_2).$
- (d) $\exists f \in \mathcal{F}, f \heartsuit f.$
- (e) $\forall (m; m') \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{F})^2, m \heartsuit m'.$
- (f) $\exists h \in \mathcal{H}, (\exists h' \in \mathcal{H}, h \heartsuit h') \vee (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f).$

2 Version :

- (a) Certaines femmes sont aimées des hommes.
- (b) Tous les hommes aiment une femme.
- (c) Certaines femmes n'aiment pas les hommes.
- (d) Tout homme a une partenaire pour former un couple (sous-entendu qu'un couple est formé de deux personnes qui s'aiment en retour).
- (e) Tous les hommes aiment une femme qui ne les aime pas en retour.
- (f) Tous les hommes aiment une femme et sont aimés par une femme (pas forcément la même).

3 Négations :

- (a) $(B \heartsuit M) \vee (B \heartsuit R).$
- (b) $\exists h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit J) \wedge (h \heartsuit B).$
- (c) $\exists h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h.$
- (d) $\forall f \in \mathcal{F}, B \heartsuit f.$
- (e) $\forall h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit B) \vee (h \heartsuit J).$
- (f) $\forall h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit B) \wedge (h \heartsuit J).$

4 Implications :

- (a)
 - i. $\forall h \in \mathcal{H}, B \heartsuit h \implies J \heartsuit h.$
 - ii. $\forall h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit B) \wedge (h \heartsuit J) \implies R \heartsuit h.$
 - iii. $\forall h \in \mathcal{H}, (B \heartsuit h) \wedge (J \heartsuit h) \implies h = M.$
- (b)
 - i. Mike n'aime aucune femme amoureuse de lui.
 - ii. Si toutes les femmes aiment Mike alors Mike n'en aime aucune.
 - iii. Juliette n'aime pas les hommes qui aiment Brenda.
 - iv. Le seul homme aimé par Juliette est Mike.
 - v. Si un homme aime les femmes alors il aime Juliette.
 - vi. Tout homme qui aime une femme aime Juliette.

5 Négations d'implications :

- (a)
 - i. $\exists h \in \mathcal{H}, (B \heartsuit h) \wedge (J \heartsuit h)$: Brenda aime un homme que Juliette n'aime pas.
 - ii. $\exists h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit B) \wedge (h \heartsuit J) \wedge (R \heartsuit h)$: Roméo aime un homme qui aime Juliette et Brenda.
 - iii. $\exists h \in \mathcal{H}, (B \heartsuit h) \wedge (J \heartsuit h) \wedge (h \neq M)$: Il existe un homme aimé de Brenda et Juliette différent de Mike.
- (b)
 - i. Mike aime une femme qui l'aime : $\exists f \in \mathcal{F}, (f \heartsuit M) \wedge (M \heartsuit f).$
 - ii. Les femmes aiment Mike et Mike en aime une : $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \wedge (\exists f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f).$
 - iii. Il existe un homme aimant Brenda qui est aimé par Juliette : $\exists h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \wedge J \heartsuit h.$
 - iv. Mike n'est pas le seul homme aimé par Juliette : $\exists h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \wedge h \neq M.$
 - v. Certain hommes aimant les femmes n'aiment pas Juliette : $\exists h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \wedge (h \heartsuit J).$

vi. Il existe des hommes qui aiment une femme sans aimer Juliette : $\exists h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \wedge (h \not\heartsuit J)$.

Commentaires : *Ne pas confondre la négation de*

$$\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \implies \dots$$

et celle de

$$(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \implies \dots$$

La position des parenthèses est importante et donnera un \exists dans la première mais pas dans la seconde.