II

Ensembles

La notion d'ensembles semble, à première vue, une notion intuitive évidente ne nécessitant pas de précautions particulières. Cette notion intuitive est à la base de toutes les mathématiques, depuis leur origine, que ce soit :

— l'arithmétique élémentaire : ensemble d'entiers, puis de divers autres types de nombres, utilisés depuis qu'on sait compter,

— la géométrie d'Euclide à nos jours : une figure est un sous-ensemble du plan,

— l'analyse : on étudie des fonctions définies sur des ensembles,

— ou l'algèbre moderne : étude des structures algébriques, définies comme des ensembles munis d'un certain nombre de lois supplémentaires.

Longtemps, les mathématiciens se sont contentés de ce point de vue intuitif, sans chercher à formaliser cette notion. Ce n'est qu'à l'aube du XX^e siècle qu'on s'est penché sur cette formalisation, qui a bien failli faire vaciller l'édifice mathématique sur ses fondations.

En effet, Cantor, puis Russell au travers de son célèbre paradoxe, ont montré qu'on ne pouvait pas se contenter de cette approche intuitive, et que celle-ci amenait des contradictions si on admettait que toute collection pouvait être un ensemble : ainsi, le paradoxe de Russell [1] montre qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles. Les mathématiciens pensèrent même un moment qu'il n'était pas possible de donner une formalisation correcte de la notion d'ensembles ; cela aurait signifié ni plus ni moins la faillite des mathématiques.

Heureusement, au prix d'une axiomatique assez lourde, les mathématiciens logiciens de l'époque ont réussi à mettre en place cette formalisation. On peut dire que cette « crise des fondements » a marqué la naissance des mathématiques et de la logique moderne, par une formalisation systématique de toutes les notions utilisées. Logique dont nous avons eu un échantillon au chapitre précédent.

Depuis, l'édifice mathématique a des fondements solides et ne s'assoit plus sur des sables mouvants.

[1]. En 1901, le logicien et philosophe anglais Bertrand Russell exprime le premier paradoxe simple prouvant que toute collection ne peut pas être un ensemble. En effet, en définissant $\mathrm{E} = \{$ensembles F qui ne se contiennent pas eux-mêmes$\}$, si E était un ensemble :

— si $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, alors par définition de E, E est élément de E, d'où une contradiction ;

— si $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, alors, par définition de E, E n'est pas élément de E, d'où une contradiction.

Cet argument très simple montre que E ne peut pas être un ensemble.

Ce paradoxe est connu sous le nom de « paradoxe de Russell » ou parfois « paradoxe du barbier ». En effet, la situation s'apparente à celle d'un barbier qui rase tout homme qui ne se rase pas lui-même. Ce barbier peut-il être un homme ?

Contenu

I Notions sur les ensembles

I.1 Généralités

Conformément au préambule, nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive et nous nous contenterons de la définition suivante :

Définition 1 : On appelle *ensemble* toute collection d'objets, appelés ses *éléments*, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x *appartient* à E » et se note $x \in \mathrm{E}$. [2]

  Dans le cas contraire, on écrira $x \notin \mathrm{E}$ et on lira « x n'appartient pas à E ».
- Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera $\varnothing$. [3]

Les ensembles, ainsi définis, permettent alors de définir à leur tour tous les objets mathématiques.

Un ensemble à un seul élément est appelé un *singleton*, noté avec des { }, un ensemble à deux éléments, une *paire*. Il n'y pas d'ordre dans l'écriture.

ATTENTION L'ensemble $\{\varnothing\}$ N'EST PAS VIDE ! il a un élément qui est l'ensemble vide contrairement à l'ensemble $\varnothing$ qui n'a pas d'éléments.

Exemples 1 :

- Les faces d'un dé : $\mathrm{F} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.
- Les couleurs d'un jeu de 32 cartes : $\mathcal{C} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

Remarque : La définition donnée est insuffisante : on ne peut pas prendre pour E n'importe quelle collection d'objets, sinon la théorie devient contradictoire (*cf.* paradoxe de Russell). Pour éviter cela, on peut imposer que E ne se contienne pas lui-même.

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des *entiers naturels*, l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres positifs permettant de dénombrer :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$
- On appelle ensemble des *entiers relatifs*, l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leur opposé :
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$
- On appelle *nombre décimal*, un nombre admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, *i.e.* un nombre de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} \,/\, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

  On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

[3]. Le symbole $\in$ vient de la lettre epsilon ϵ, première lettre du verbe *être* en grec).

[3]. Le symbole représente un cercle pour le tout, barré ($\varnothing$) et non un zéro barré ($\cancel{0}$).

- On appelle *nombre rationnel* un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, (p\,;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des *nombres réels*, l'ensemble $\mathbb{R}$ dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.
- On appelle ensemble des *nombres complexes*, l'ensemble $\mathbb{C}$ des couples de réels muni d'une multiplication particulière :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + \mathrm{i}\, b \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{i}^2 = -1 \right\}.$$

Remarque : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{2^p 5^q} \,/\, a \in \mathbb{Z}, (p\,;q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

On peut définir des ensembles par :

1 Extension :

$\mathrm{E} = \{1;\, 8;\, 6;\, 2\} = \{1;\, 1;\, 1;\, 8;\, 6;\, 6;\, 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).

$\mathrm{I} = \{1;\, 3;\, 5;\, 7,\, 9\}$: l'ensemble des dix premiers nombres impairs.

$\mathrm{B} = \{valet;\, dame;\, roi\}$: l'ensemble des figures d'une jeu de cartes.

$\mathrm{D} = \{1;\, 2;\, 8;\, 16, ...\} = \{2^i\}_{i \in \mathbb{N}}$: l'ensemble des puissances de 2.

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.

2 Compréhension :

$\mathrm{I} = \{p \in \mathbb{N} \,/\, p \text{ est impair}\} = \{2k+1 \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ *i.e.* la donnée d'une propriété $\mathcal{P}$ caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros, ici $\mathbb{N}$).

Étant donné un ensemble E et une propriété $\mathcal{P}$, on définit F comme sous-ensemble de E :

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, \mathcal{P}(x)\}.$$

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\; x \in \mathrm{F} \iff \mathcal{P}(x).}$

Exemple 2 : L'ensemble des naturels pairs peut être défini par extension $\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8, ...\}$ et par compréhension $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists p \in \mathbb{N},\; n = 2p\}$.

Exercice 1 : Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

1. l'ensemble des naturels impairs,
2. la courbe d'une fonction f (ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ du plan $(\mathscr{P})$ vérifiant $y = f(x)$),
3. la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.

3 Induction structurelle :

C'est se donner un certain nombre d'éléments de E, et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 : L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E, pq est dans E.

4 **Construction :** Unions, intersections d'ensembles. Nous reverrons ce principe.

Exemple 4 : Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\mathscr{D}_a$ l'ensemble des diviseurs de a.
Alors, pour tous entiers a et b, $\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b.

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 3 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Un ensemble A est dit *inclus* dans un ensemble B, noté $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, si tout élément de A est aussi un élément de B.

On dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B ou une *partie* de B.

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \forall x \in \mathrm{A},\ x \in \mathrm{B}.$$

Exemple 5 : $\{-2, 5\} \subset \mathbb{Z}$ et $\{1, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$.

Remarque : La notion de singleton nous donne un lien entre appartenance et inclusion :

Soit E un ensemble et a un objet. Alors : $\boxed{a \in \mathrm{E} \iff \{a\} \subset \mathrm{E}.}$

ATTENTION

Au bon usage des symboles $\in$ et $\subset$:

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in \mathrm{E}$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $\mathrm{F} \notin \mathrm{E}$.
- ET un élément n'est pas inclus dans un ensemble : $x \not\subset \mathrm{E}$.

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\varnothing \subset \mathrm{A}$.
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$ (et A=A !).
- $\left(\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B} \subset \mathrm{C}\right) \implies \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$. On dit que l'inclusion est *transitive*.

Exercice 2 : Compléter les propositions suivantes avec le symbole $\in$ ou $\subset$.

1 $\varnothing \ldots \{1, 2, 3, 4\}$ 2 $1 \ldots \{1, 2, 3, 4\}$ 3 $\{1\} \ldots \{1, 2, 3, 4\}$

Proposition 1 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \Big(\forall x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x) \implies \mathscr{Q}(x)\Big).$$

Méthode 1 (Montrer $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$) :

- On considère un élément quelconque de A, par exemple, vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}$ et on montre qu'il appartient à B, par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété $\mathcal{Q}$.

ou

- On considère un élément n'appartenant pas à B et on montre qu'il ne peut appartenir à A.

Exercice 3 : Montrer que $\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4\} \subset [-2\,;2]^2$.

I.3 Égalité d'ensembles

Définition 4 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On dit que les ensembles A et B sont égaux, noté A = B, s'ils ont exactement les mêmes éléments.

L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{B} &\iff (\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B} \subset \mathrm{A}) \\ &\iff (\forall\, x,\; x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}). \end{aligned}$$

Dans le cas d'ensembles A et B respectivement définis par deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'égalité des ensembles équivaut à l'équivalence des propriétés :

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\; \mathcal{P}\,(x) \iff \mathcal{Q}\,(x)\,.$$

Méthode 2 (Égalité de deux ensembles) :
Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procèdera donc par double inclusion ou directement par équivalence.

Exercice 4 : Soient $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que $[a\,;b] = \{(1-t)a + tb \,/\, t \in [0\,;1]\}$.

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \notin \mathrm{B} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \in \overline{\mathrm{B}}$.
- $\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \iff \mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ ou $\mathrm{B} \not\subset \mathrm{A} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \notin \mathrm{B}$ ou $\exists x \in \mathrm{B} \,/\, x \notin \mathrm{A}$.

Exemple 6 : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Proposition 3 :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

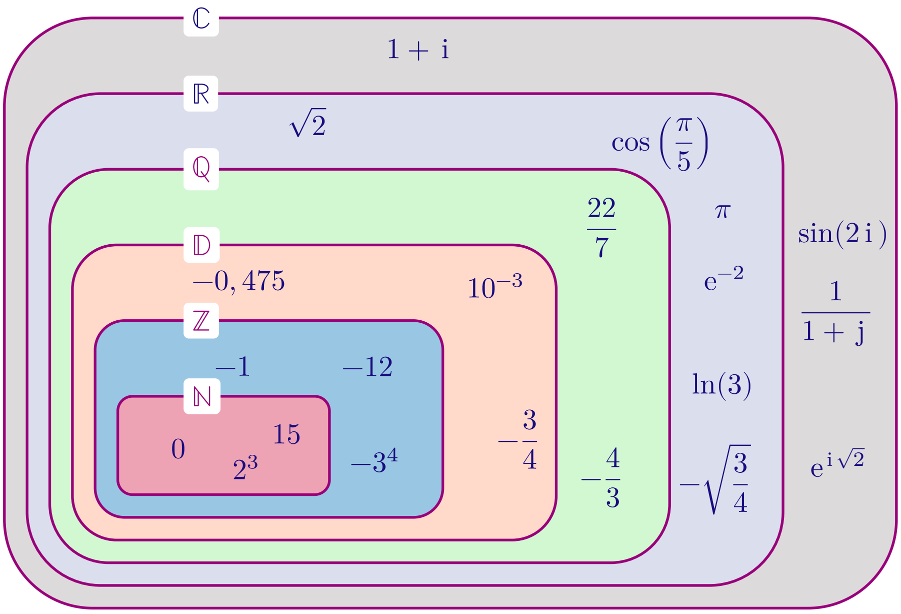


Figure II.1 – Les ensembles de nombres usuels

Preuve :

- Par construction, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

  D'autre part $-3 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$ car négatif donc $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$.
- $\forall\, a \in \mathbb{Z},\ a = \dfrac{a}{10^0} \in \mathbb{D}$.

  Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

  D'autre part, montrons que $\dfrac{1}{10} \in \mathbb{D}$ en supposant le contraire i.e. $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{1}{10} = m \iff 1 = 10m$.

  m serait alors inversible dans $\mathbb{Z}$ donc égal à ± 1 ce qui n'est pas.

  Conclusion, $\dfrac{1}{10} \notin \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \neq \mathbb{D}$.
- Il est assez clair que tout nombre de la forme $\dfrac{a}{10^n} \in \mathbb{Q}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

  De plus, $\dfrac{1}{3}$ ne peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{10^n}$. Si c'était le cas, on aurait $3p = 10^n \iff 3|10^n$, ce qui est absurde.

  Donc $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par construction.

  Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ que l'on peut supposer premiers entre eux.

  On aurait $2b^2 = a^2$, et donc a serait pair.

  En posant $a = 2a'$, on a $b^2 = 2a'^2$, donc b est également pair ce qui contredit l'hypothèse de primalité.

  Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

Remarque : Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés *irrationnels*. Leur ensemble est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (« $\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$»).

Exercice 5 (Vrai ou Faux ?) :

1. La somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Le produit de deux rationnels est un rationnel.
3. La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
4. Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
5. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 : Si A est inclus dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Il contient en particulier la partie vide $\varnothing$ et la partie *pleine* E donc $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites *propres* ou *strictes*.

Remarque : Ainsi que nous l'avons évoqué en début de section, toute collection d'éléments ne peut pas nécessairement être considérée comme un ensemble.

Par exemple, on ne peut pas parler de l'ensemble des ensembles [4]. Il n'est donc, a priori, pas évident que $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ soit toujours un ensemble. En fait, cela fait partie des axiomes que l'on pose pour définir la théorie des ensembles mais, conformément au programme, je n'en dirai pas plus sur ce point.

On a donc l'équivalence importante :

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{E}.}$$

ATTENTION Si A est un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dont l'appartenance est notée avec le symbole $\in$, A est un sous-ensemble de E marqué par le symbole $\subset$.

Exemples 7 :

- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Exercice 6 : Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathcal{P}([a\,;b])$.

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E, on considérera souvent 3 niveaux :

— celui des éléments de E, notés par des petites lettres x, y, a,...
— celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, notées par des majuscules droites : $\mathrm{A} = \{x, y\}$, ...
— celui des ensembles de parties de E, inclus dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E}))$, notés par des majuscules cursives : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, ...

[4]. Pour bien comprendre cela je vous renvoie au problème du barbier qui rase toutes les personnes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui le rase ?

II Ensembles et fonctions

Les applications seront définies de manière rigoureuse au chapitre suivant. On se contente ici de la notion intuitive dégagée en terminale.

II.1 Vocabulaire usuel

Définition 6 (Ensemble de définition, image et antécédents) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition* de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$ est appelé une valeur de f.

Pour tous $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$, si $y = f(x)$, on dit que y est L'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de y par f.

On dira souvent que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est à valeurs dans F mais sans suggérer que tous les éléments de F sont atteints.

II.2 Image directe par une application

Définition 7 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E.

On appelle *image* (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) = \left\{y \in \mathrm{F} \;/\; \exists\, x_y \in \mathrm{A},\ f(x_y) = y\right\} \subset \mathrm{F}.$$

Si $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, on dit que A est *stable* par f.

Vocabulaire : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On appelle *ensemble image* de f, noté imf ou $f(\mathrm{E})$, l'ensemble de toutes les images de E par f.

C'est donc une partie de F et plus précisément c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E *i.e.*

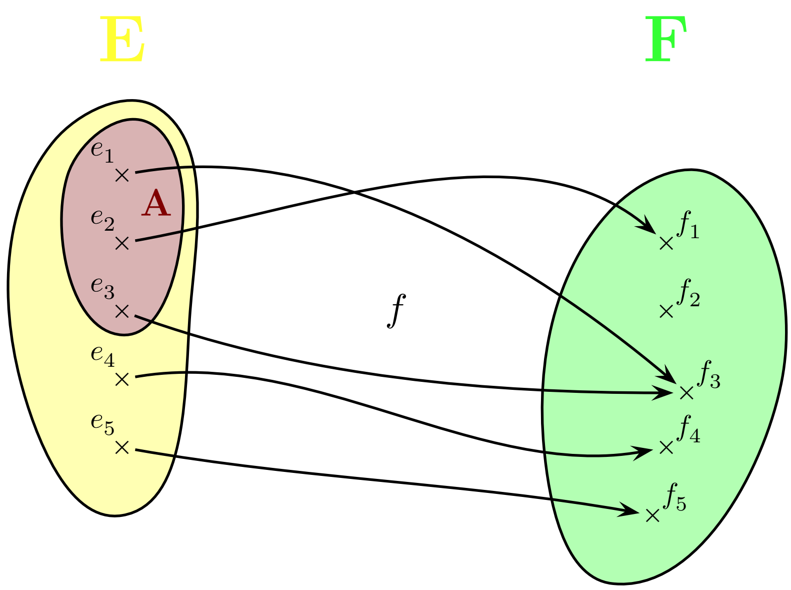
$$imf = f(\mathrm{E}) = \left\{y \in \mathrm{F} \;/\; \exists\, x \in \mathrm{E}, y = f(x)\right\}.$$

On fera attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$.

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction cos est $[-1\,;1]$.
- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $[1\,;+\infty[$.

  Celle de $\mathbb{R}_-$ est $]0\,;1]$.
- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$ alors $f(\,]-3\,;2[\,) = [0\,;9[$. L'intervalle $[-1\,;1]$ est stable par f. $[-1\,;0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction sin :
  - l'image de $[0\,;\pi]$ est $[0\,;1]$,
  - l'image de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est $[-1\,;1]$,
  - et l'image de $[0\,;2\pi]$ est aussi $[-1\,;1]$.



$$f(\mathrm{A}) = \{f_1,\ f_3\}.$$

Figure II.2 – Image directe d'une partie par une application.
On parle ici de *diagramme sagittal*.

- l'image de $\pi\mathbb{Z}$ est $\{0\}$.
- Plus généralement, pour déterminer l'ensemble image d'une fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on étudie les variations de f.
- L'ensemble image de la fonction $g : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ définie par $\forall\, z \in \mathbb{C},\ g(z) = z^2$ est $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. On le démontrera plus tard mais, intrinsèquement, ceci signifie que tout nombre complexe possède, au moins, une racine carrée.

ATTENTION

sin est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1\,;1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}$ voire $\mathbb{R}_+$ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.

D'une manière générale, $f(\mathrm{E}) \neq \mathrm{F}$.

Exercice 7 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos x \end{array}$ Déterminer :

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f\left(\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $f\left([0\,;\pi[\right)$.

Définition 8 (Surjection) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une *surjection* ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

La définition (8) revient à dire que pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E, ou encore

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists\, x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x).$$

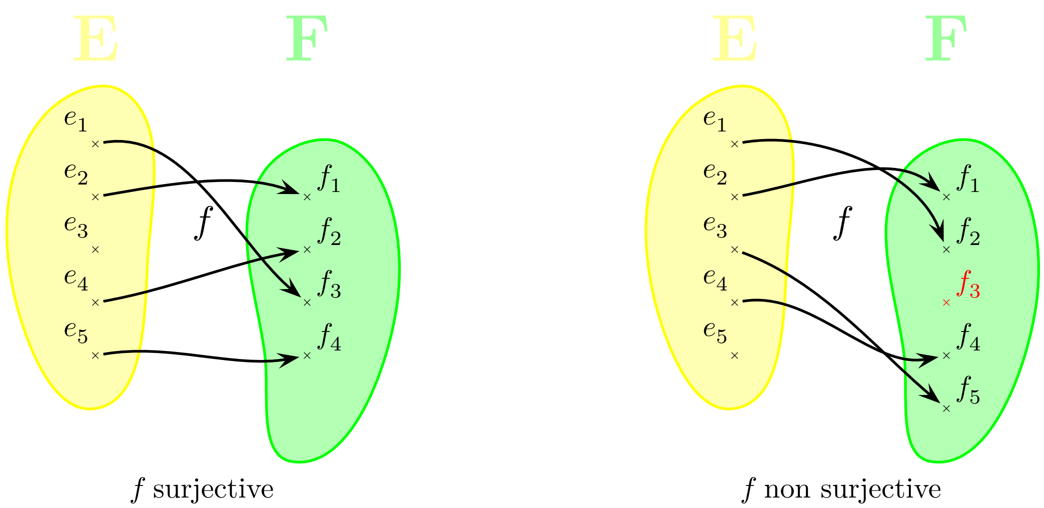


Figure II.3 – Diagramme sagittal d'une fonction surjective.

Et d'une manière générale très importante :

$$\boxed{f \text{ est surjective de E dans F} \iff imf = \mathrm{F} \iff f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}.}$$

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_{E} est surjective sur E.
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est une application, alors f induit une surjection entre E et imf qui est l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \twoheadrightarrow & imf \\ x & & g(x) = f(x). \end{array}$$

  Toute « corestriction» d'une application à son ensemble image est donc surjective.
- La projection $p_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ (x\,;y) & & x \end{array}$ est surjective.

  Les relèvements (antécédents) de tout élément x de E sont de la forme $\{x\} \times \mathrm{F}$.

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction est surjective) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une fonction entre deux ensembles E et F.

Pour montrer que f est surjective de E sur F, on considère un élément $y \in \mathrm{F}$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in \mathrm{E}$ de y par f.

Exercice 8 : Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & & x^2 \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & 2x \end{array}$
4. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{N} \\ n & & 2n \end{array}$

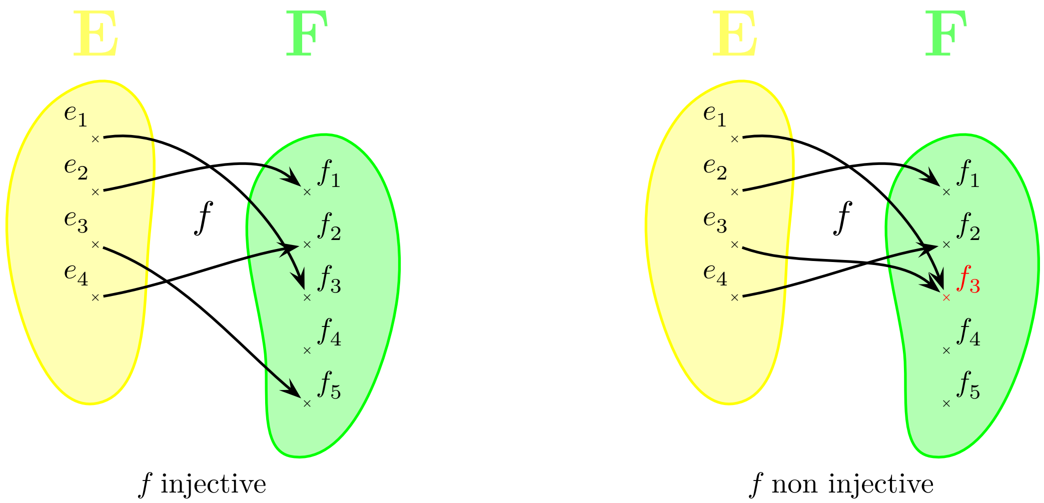


Figure II.4 – Diagramme sagittal d'une fonction injective.

Définition 9 (Injection) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une *injection* (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.

La définition (9) revient à dire que pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E.

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_{E} est injective.
- Soit A une partie non vide de E, l'application $i : \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ x & & x \end{array}$ est injective d'où son nom d'*injection canonique* de A dans E.
- La fonction ln est une injection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de même que sa fonction réciproque exp qui l'est de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ n'est pas une injection de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 : $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Preuve : *Si f est injective sur E, par définition, les antécédents sont uniques donc $\forall\,(x\,;y) \in \mathrm{E}^2$, $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$.*

Réciproquement, soit f vérifiant la propriété $\forall\,(x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \implies x = y$ et soit $z \in \mathrm{F}$ ayant deux antécédents distincts x et y dans E i.e. $z = f(x) = f(y)$.

La propriété vérifiée par f entraîne immédiatement $x = y$ ce qui contredit l'hypothèse sur z qui ne peut donc avoir qu'un unique antécédent i.e. f est injective.

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier» en cours de calcul *i.e.* si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ après « simplification».

La fonction f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents et, en particulier,

Corollaire 4.1 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

Exemple 11 : La fonction $x \longmapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Méthode 4 (Montrer qu'une fonction est injective) :
Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une fonction entre deux ensembles E et F.

Pour montrer que f est injective sur E, on considère deux éléments x et y de E tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

Exercice 9 : Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$

3. $k : \begin{array}{ccc}]-\pi\,;0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$

II.3 Image réciproque par une application

Définition 10 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F.

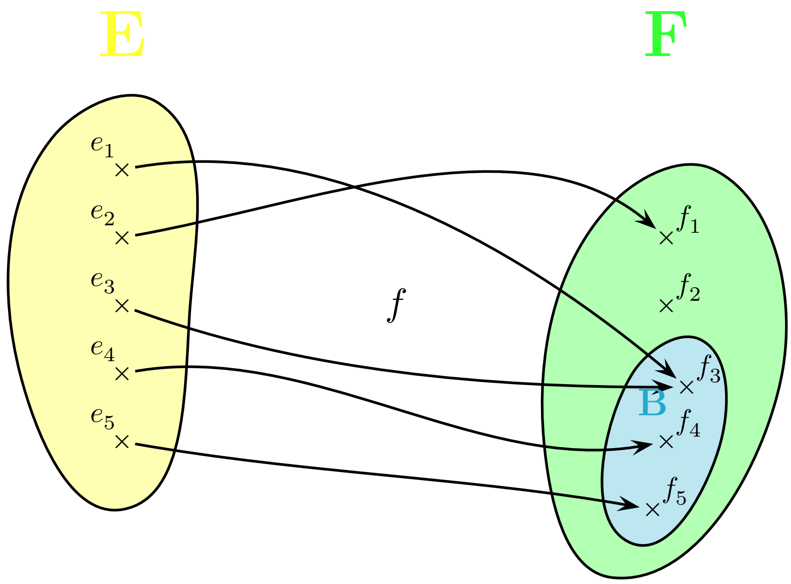
On appelle image *réciproque* de B par f l'ensemble défini par :

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \left\{x \in \mathrm{E} \;/\; f(x) \in \mathrm{B}\right\} \subset \mathrm{E}.$$

Exemple 12 : Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$ alors $f^{-1}(]1\,;3]) = \left[-\sqrt{3}\,;-1\right[\cup \left]1\,;\sqrt{3}\right]$.

ATTENTION

La notation f^{-1} peut porter à confusion avec la fonction réciproque d'une fonction bijective f. On ne suppose nullement ici que f est bijective dans la définition de $f^{-1}(\mathrm{B})$ mais lorsque f le sera on pourra ultérieurement vérifier que l'image réciproque de B par f correspond à l'image directe de B par f^{-1}.



$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}.$$

Figure II.5 – Image réciproque d'une partie par une application.

Exercice 10 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos x \end{array}$ Déterminer :

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4. $f^{-1}(\{1\})$.
5. $f^{-1}(\,]-1\,;2]\,)$.
6. $f^{-1}(\,[0\,;\pi]\,)$.
7. $f(f^{-1}(\,[0\,;1]\,))$.
8. $f^{-1}\left(f\left(\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$.

Théorème 5 (Stabilité par image directe) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toutes parties A et B de E, on a :

1. $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$.
2. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{B})$.

Preuve :

1. Si $x \in \mathrm{A}$, $f(x) \in f(\mathrm{A})$ i.e. $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$ par définition [5].
2. Easy.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toutes parties A et B de F, on a :

1. $f(f^{-1}(\mathrm{B})) \subset \mathrm{B}$.
2. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f^{-1}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.

[5]. $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \{x \in \mathrm{E} \,/\, f(x) \in f(\mathrm{A})\}$

Preuve :

1. Soit $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$. Alors $f(x) \in \mathrm{B}$ par définition.
2. Si $x \in f^{-1}(\mathrm{A})$ alors $f(x) \in \mathrm{A}$ donc $f(x) \in \mathrm{B}$ i.e. $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$.

III Opérations sur les ensembles

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E.

III.1 Complémentarisation

Définition 11 : Le *complémentaire* d'un ensemble A (dans E), noté $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

$$\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\backslash\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \ / \ x \notin \mathrm{A}\}$$

En théorie des ensembles, on utilisera souvent les diagrammes de Venn [6] pour illustrer les relations entre eux.

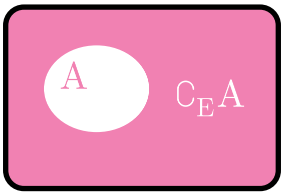


Figure II.6 – Complémentaire d'une partie.

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\ x \in \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} \iff x \notin \mathrm{A}.}$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

Remarque : La notion de complémentarité dépend de l'ensemble de référence E donc attention aux velléités trop hâtives de remplacer la notation $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ par $\overline{\mathrm{A}}$.

Exercice 11 : Soient $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{F} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

On considère $\mathrm{A} = \{1, 2\}$. Déterminer $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ et $\complement_{\mathrm{F}}\mathrm{A}$.

Proposition 7 :

- $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{E} = \varnothing$.
- $\complement_{\mathrm{E}}\varnothing = \mathrm{E}$.
- $\forall\, \mathrm{A} \subset \mathrm{E},\ \complement_{\mathrm{E}}(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

La dernière propriété se dit, que la complémentarisation est une opération involutive [7]

[6]. John Venn (**1834-1923**) est un mathématicien et logicien britannique, renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn qui sont employés dans beaucoup de domaines, notamment en théorie des ensembles, en probabilité, en logique, en statistique et en informatique.

John Venn a présenté les diagrammes portant son nom en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

[7]. Comme la conjugaison dans $\mathbb{C}$, la symétrie axiale dans le plan ou l'inversion sur les réels non nuls.

III.2 Intersection

Définition 12 : L'*intersection* de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E \;/\; x \in A \quad \text{et } x \in B\}.$$

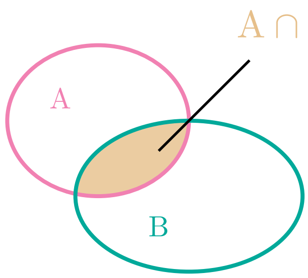


Figure II.7 – Intersection d'ensembles.

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in E,\ x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).}$

L'intersection est aux ensembles ce que la *conjonction* est aux propriétés.

Exemples 13 : $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \cap \{1,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 4\}$ et $[1\,;3] \cap]2\,;4] =]2\,;3]$.

Proposition 8 (Propriétés algébriques) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \varnothing = \varnothing$. ($\varnothing$ est absorbant pour $\cap$)
- $A \cap E = A$. (E est élément neutre pour $\cap$)
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$. (A et $\overline{A}$ sont disjoints dans E)

Définition 13 (Ensembles disjoints) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On dit que A et B sont *disjoints* ou incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- On dit que A et B sont *distincts* lorsqu'ils ne sont pas égaux.

Comme on l'a vu, un sous-ensemble et son complémentaire dans E sont toujours disjoints.

Remarque : $\varnothing$ est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! À part ça, disjoint implique distinct.

Proposition 9 : Soient A et B deux sous-ensembles de E.

$$A \text{ et } B \text{ sont disjoints} \iff A \cap B = \varnothing \iff A \subset \complement_E B \iff B \subset \complement_E A.$$

A et B ne sont pas disjoints A et B sont disjoints

A et B sont distincts.

Figure II.8 – Ensembles disjoints et distincts.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B} \text{ sont distincts } &\iff \mathrm{A} \not\subset \mathrm{B} \text{ ou } \mathrm{B} \not\subset \mathrm{A} \\ &\iff \text{il existe un élément appartenant à l'un des ensembles et pas à l'autre.} \end{aligned}$$

Théorème 10 (Stabilité par image directe et réciproque) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

1. Pour toute parties A et B de E, $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
2. Pour toute parties A et B de F, $f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B})$.

Preuve :

1. Si $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ alors $f(x) \in f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. On en déduit $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

   On n'a pas l'inclusion réciproque en général. Il suffit pour cela de considérer la fonction cos de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les ensembles $\mathrm{A} = \left[-\dfrac{\pi}{2} ; -\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\mathrm{B} = [0 ; \pi]$ pour lesquels $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varnothing$ et $f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B}) = \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.
2. $x \in f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \iff f(x) \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \iff f(x) \in \mathrm{A}$ et $f(x) \in \mathrm{B} \iff x \in f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B})$.

Contre-Exemple 14 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$.

Alors $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \neq f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.

III.3 Réunion

Définition 14 : La *réunion* de deux ensembles A et B, noté A∪B, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \;/\; x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}.$$

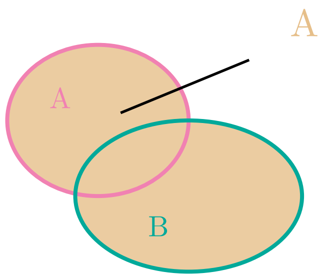


Figure II.9 – Réunion d'ensembles.

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\; x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A}) \vee (x \in \mathrm{B}).}$

La réunion est aux ensembles ce que la *disjonction* est aux propriétés.

Proposition 11 (Propriétés algébriques) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
- $\mathrm{A} \cup \varnothing = \mathrm{A}$. ($\varnothing$ est neutre pour $\cup$)
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{E} = \mathrm{E}$. (E est élément absorbant pour $\cup$)
- $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$. (A et $\overline{\mathrm{A}}$ recouvrent E)

Exercice 12 :

1. Simplifier $[1\,;3] \cup\,]2\,;4]$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toute parties A et B de E, on a :

1. $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
2. $f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B})$.

Preuve :

1. Si $x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{B}$ alors $f(x) \in f(\mathrm{A})$ ou $f(x) \in f(\mathrm{B})$ i.e. $f(x) \in f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{A})$.

   Réciproquement, comme $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, on a d'après, le premier point , $f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et, de la même manière, $f(\mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. On en déduit $f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ puis l'égalité par double inclusion.
2. $x \in f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \iff f(x) \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff x \in f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B})$.

Proposition 13 (Propriétés algébriques de $\cap$ et $\cup$) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Associativité

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sous-ensemble

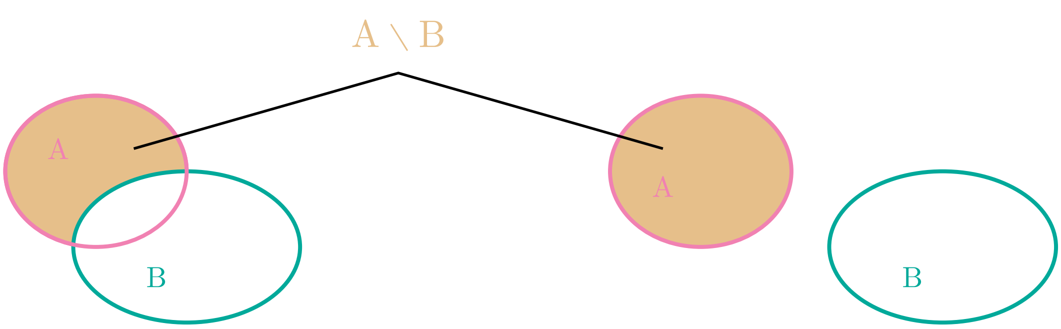
- $\complement_E(E) = \varnothing$ et $\complement_E(\varnothing) = E$
- $\complement_E \complement_E A = A$ et $A \cup \complement_E A = E$.
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \complement_E B \subset \complement_E A$.

L'équivalence $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ est aux ensembles ce qu'est aux propriétés l'équivalence entre une propriété et sa contraposée.

III.4 Différence

Définition 15 : La *différence* des ensembles A et B, notée $A \backslash B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B.

$$A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B.$$



A et B sont ne sont pas disjoints A et B sont sont disjoints

Figure II.10 – Différence de deux ensembles.

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}\setminus]-\infty\,;0[$.
- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes non réels. Cet ensemble contient strictement l'ensemble des imaginaires purs non nuls $\mathrm{i}\,\mathbb{R}^*$.[8]

Il faut bien garder en tête la correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques :

Résumé et analogie :

$$\begin{array}{lcr}
\cup \equiv \vee & & x\in \mathrm{A}\cup\mathrm{B} \iff (x\in\mathrm{A})\vee(x\in\mathrm{B})\\
\cap \equiv \wedge & & x\in \mathrm{A}\cap\mathrm{B} \iff (x\in\mathrm{A})\wedge(x\in\mathrm{B})\\
\complement \equiv \rceil & & x\in \complement\mathrm{B} \iff \rceil(x\in\mathrm{B})\\
\subset \equiv \implies & & \mathrm{A}\subset\mathrm{B} \iff (x\in\mathrm{A} \implies x\in\mathrm{B})\\
= \equiv \iff & & \mathrm{A}=\mathrm{B} \iff (x\in\mathrm{A} \iff x\in\mathrm{B})
\end{array}$$

IV Famille d'ensembles

IV.1 Réunion et intersection

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) : Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I quelconque.

- La *réunion* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :
$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i = \{x\in\mathrm{E} \;/\; \exists i_x\in\mathrm{I},\ x\in\mathrm{A}_{i_x}\}.$$
- L'*intersection* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :
$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i = \{x\in\mathrm{E} \;/\; \forall\, i\in\mathrm{I},\ x\in\mathrm{A}_i\}.$$

Remarque : L'existence de tels ensembles est un axiome de la théorie des ensembles.

Exemples 16 :

- $\mathrm{D}_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;/\; k\in\mathbb{Z}\right\} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$.
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0\,;1]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n\pi\,;(2n+1)\pi]$.

On montrera plus tard que :

- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1[=\mathbb{R}$
- $\displaystyle\bigcup_{n\geqslant1}\left[\frac{1}{n},1\right] =]0\,;1]$.
- $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant1}\left]-\frac{1}{n},1\right] = [0\,;1]$.
- $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant1}\left[1-\frac{1}{n},1\right] = \{1\}$.

[8]. De la même manière que 0 est l'unique réel à être positif et négatif, c'est le seul nombre complexe à être réel et imaginaire pur.

Un certain nombre de propriétés vues dans les paragraphe précédents se généralisent aux unions et intersections quelconques :

Proposition 14 : Étant donné $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E.

Distributivité :

- $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B\cap A_i)$.
- $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B\cup A_i)$.

Lois de Morgan :

- $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (\complement_E A_i)$.
- $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\complement_E A_i)$.

Exercice 13 : Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Soit f une application de E vers F.

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j)$ et $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$ et $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Aide : recommencer par $f(A\cup B)$ si on n'a pas les idées claires.

Moralité : Les assertions du théorème (12) et du théorème (10) se généralisent à une famille quelconques de parties de E.

Proposition 15 : Soit $f : E \longmapsto F$ une application entre deux ensembles E et F.

Pour tout y de F, les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) = E$.

IV.2 Notion de partition

Définition 17 : Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

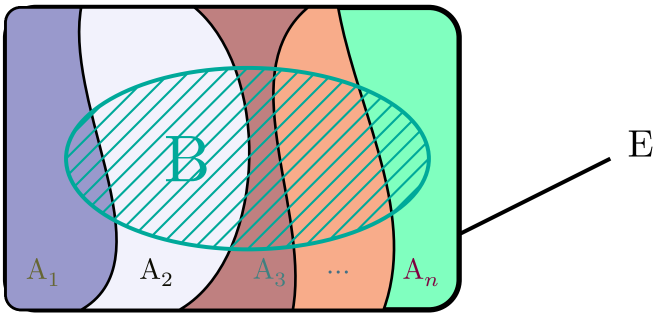
On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall\, i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
- $\forall\ (i\,;j) \in I^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$,
- et $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Les sous-ensembles A_i s'appellent les *composantes* de la partition.

Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $I \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.

On note $E = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ pour signifier la réunion disjointe.



$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure II.11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.

Remarque : Des ensembles d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ tels que $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$ sont dits *deux à deux disjoints*.

On a alors $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$ mais la réciproque est fausse.

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E. D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

  Donc, A et $\overline{A}$ forment une *partition* de E.
- Soit $f : E \longmapsto F$ une application.

  D'après la proposition (15) , si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y \in F}$ forme une partition de E.
- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \sqcup \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de $\mathbb{R}$.
- Si $E \neq \varnothing$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.
- La famille d'intervalles $\{[n\,;n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Soit $E = \{a\, b,\, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

1. $\{\varnothing, \{a, c\}, \{b\}\}$
2. $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$
3. $\{\{a\}, \{c\}\}$
4. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

Exercice 15 : Quelles partitions pourrait-on envisager pour l'ensemble $E = [a\,;b]$?

V Produit cartésien

Une *liste*, ou *suite finie*, ou encore *famille finie* est une collection finie d'objets, appelés ses *éléments*, considérés avec ordre, et répétitions possibles.

— Le nombre d'éléments de la liste s'appelle sa *taille* ou son *ordre* ou encore, sa *longueur* ;

— Les listes de taille 2, 3, 4, 5, ..., n sont, respectivement, des couples, triplets, quadruplets, quintuplets, ..., n-uplets.

— On peut définir les listes à partir de la notion d'ensembles de la façon suivante :

1)	$(x) = \{x\}$
2)	$(x\,;y) = (\{x\}\,;\{y\})$
3)	$(x\,;y\,;z) = (\,(x\,;y)\,,\,z)$
...	
n)	$(x_1\,;\ldots;x_n) = ((x_1\,;\ldots;x_{n-1})\,;x_n)$

— L'écriture de la liste $(a_1, \ldots, a_n)$ est parfois abrégée en $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$; a_i est appelé la i—ème *coordonnée* de la liste.

— L'égalité de deux n-uplets se traduit comme suit :

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in [\![1\,;n]\!] \;\; x_i = y_i.$$

Plus généralement, on a la définition :

Définition 18 (Produit cartésien) : Étant donnés n ensembles E_1, ..., E_n.

On appelle *produit cartésien*[9] des ensembles E_1, ..., E_n, noté $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ $\left(\text{ou } \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i\right)$, l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ dont la i-ème coordonnée est un élément de E_i.

$$\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \;/\; \forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\; x_i \in \mathrm{E}_i\}.$$

On pourrait également définir des produits cartésiens infinis comme les réunions et intersections, mais cela nécessite un peu plus de technique, et c'est hors-programme.

On note $\mathrm{E}^2 = \mathrm{E} \times \mathrm{E}$, et plus généralement $\mathrm{E}^n = \overbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E}}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 : $\mathbb{R}^n = \{(x_1\,;\ldots;x_n) \,/\, \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\; x_i \in \mathbb{R}\}$.

ATTENTION

Ne pas confondre $(x_1, \ldots, x_n) \neq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

— $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \ldots, x_n) \neq (x_n, \ldots, x_1).$$

— $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel

- l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_n, \ldots, x_1\}\,,$$

- le nombre d'apparitions des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Exemples 19 :

- $(1\,;2)$ est un couple différent de $(2\,;1)$. L'ensemble $\{1,\, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2,\, 1\}$.

[9]. en l'honneur de Descartes qui a, le premier, dégagé la notion de coordonnées.

- $(1\,;1)$ est un couple et $\{1,\,1\} = \{1\}$ un singleton.
- Pour $\mathrm{A} = \{a;\, b\}$ et $\mathrm{B} = \{1;\, 2;\, 3\}$, on a :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \{\,(a\,;1)\,;\,(a\,;2)\,;\,(a\,;3)\,;\,(b\,;1)\,;\,(b\,;2)\,;\,(b\,;3)\,\}.$$

$\mathrm{A}\times\mathrm{B}$	1	2	3
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	$(a\,;3)$
b	$(b\,;1)$	$(b\,;2)$	$(b\,;3)$

Remarque : Dans le produit cartésien $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ de deux ensembles A et B, pour chaque élément a de A, on dispose d'une copie complète de B, identifiée au produit $\{a\}\times\mathrm{B}$, c'est-à-dire à l'ensemble des couples $(a\,;b)$, pour b parcourant B.

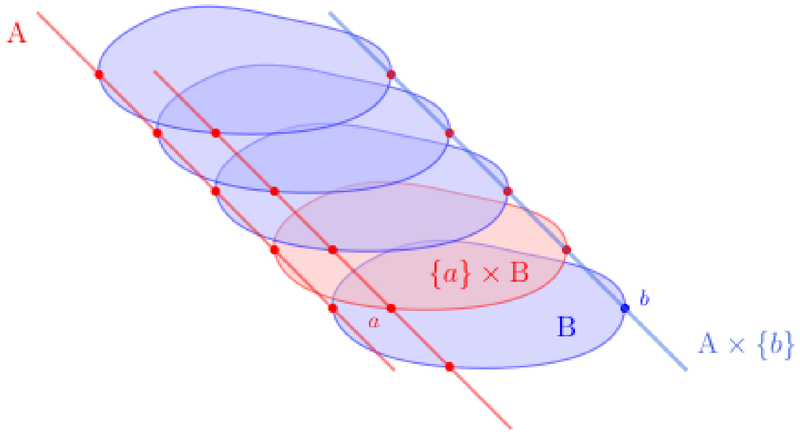


Figure II.12 – Sections de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$.

Remarque : D'un point de vue formel, on a donc l'équivalence :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathrm{E},\ \forall\, y\in\mathrm{F} \iff \forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F}.}$$

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x\,;y)$ est noté $\mathbb{R}^2$. On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x\,;y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x\,;y)$.
- $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p\,;q)$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
- Le cercle trigonométrique $\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2=1\}$ n'est pas un produit cartésien. Il ne peut pas s'écrire sous la forme $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ où A, B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Proposition 16 : Soit E, E′ et F des ensembles.

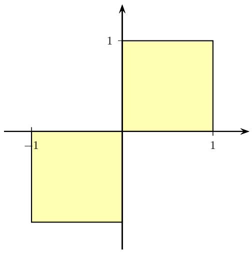
Alors :

- $\mathrm{E}\times\mathrm{F}=\varnothing \iff (\mathrm{E}=\varnothing)\vee(\mathrm{F}=\varnothing)$
- $(\mathrm{E}\cup\mathrm{E}')\times\mathrm{F} = (\mathrm{E}\times\mathrm{F})\cup(\mathrm{E}'\times\mathrm{F})$.
- $(\mathrm{E}\cap\mathrm{E}')\times\mathrm{F} = (\mathrm{E}\times\mathrm{F})\cap(\mathrm{E}'\times\mathrm{F})$.

ATTENTION

En général, $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

Dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, $([0\,;1] \times [0\,;1]) \cup ([-1\,;0] \times [-1\,;0])$ est différent de l'ensemble $[-1\,;1] \times [-1\,;1]$.



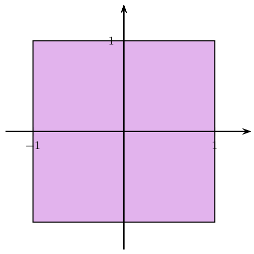


Figure II.13 – $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Exemples 21 :

- $\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1\,;1\,;1)\,;\,(1\,;1\,;2)\,;\,(1\,;1\,;3)\,;\,(1\,;2\,;1)\,; \\ (1\,;2\,;2)\,;\,(1\,;2\,;3) \end{array} \right\}$.
- Hachurer dans le plan $\Big([0,1] \cup [2,3]\Big) \times [0,3]$.

Index