

II

Ensembles

Contenu

I. Notions sur les ensembles	2
I.1 Généralités	2
I.2 Inclusion d'ensembles	4
I.3 Égalité d'ensembles	5
I.4 Ensemble des parties d'un ensemble	6
II. Ensembles et fonctions	7
II.1 Vocabulaire usuel	7
II.2 Images directes par une application	7
II.3 Images réciproques par une application	11
III. Opérations sur les ensembles	12
III.1 Complémentarisation	12
III.2 Intersection	13
III.3 Réunion	15
III.4 Différence	16
IV. Famille d'ensembles	17
IV.1 Réunion et intersection	17
IV.2 Notion de partition	18
V. Produit cartésien	19

I NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

I.1 Généralités

Définition 1 : On appelle *ensemble* toute collection d'objets, appelés ses *éléments*, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x appartient à E » et se note $x \in E$. ^[1]
Dans le cas contraire, on écrira $x \notin E$ et on lira « x n'appartient pas à E ».
- Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera \emptyset . ^[2]

Un ensemble à un seul élément est appelé un *singleton*, noté avec des $\{ \}$, un ensemble à deux éléments, une *paire*. Il n'y a pas d'ordre dans l'écriture.

ATTENTION

L'ensemble $\{\emptyset\}$ N'EST PAS VIDE! il a un élément qui est l'ensemble vide contrairement à l'ensemble \emptyset qui n'a pas d'éléments.

Exemples 1 :

- Les faces d'un dé : $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.
- Les couleurs d'un jeu de 32 cartes : $\mathcal{C} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des *entiers naturels*, l'ensemble \mathbb{N} des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$

- On appelle ensemble des *entiers relatifs*, l'ensemble \mathbb{Z} constitué des entiers naturels et de leur opposé :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n / n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- On appelle *nombre décimal*, un nombre admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, *i.e.* un nombre de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} / a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On note \mathbb{D} l'ensemble des nombres décimaux.

- On appelle *nombre rationnel* un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbb{Q} leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des *nombres réels*, l'ensemble \mathbb{R} dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.

[2]. Le symbole \in vient de la lettre epsilon ϵ , première lettre du verbe *être* en grec).

[2]. Le symbole représente un cercle pour le tout, barré (\emptyset) et non un zéro barré ($\cancel{0}$).

- On appelle ensemble des *nombres complexes*, l'ensemble \mathbb{C} des couples de réels muni d'une multiplication particulière :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}.$$

Remarque : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{2^p 5^q} / a \in \mathbb{Z}, (p; q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

On peut définir des ensembles par :

1 Extension :

$E = \{1; 8; 6; 2\} = \{1; 1; 1; 8; 6; 6; 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).

$I = \{1; 3; 5; 7; 9\}$: l'ensemble des dix premiers nombres impairs.

$B = \{\text{valet; dame; roi}\}$: l'ensemble des figures d'une jeu de cartes.

$D = \{1; 2; 8; 16; \dots\} = \{2^i\}_{i \in \mathbb{N}}$: l'ensemble des puissances de 2.

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.

2 Compréhension :

$I = \{p \in \mathbb{N} / p \text{ est impair}\} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$ i.e. la donnée d'une propriété \mathcal{P} caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros, ici \mathbb{N}).

Étant donné un ensemble E et une propriété \mathcal{P} , on définit F comme sous-ensemble de E :

$$F = \{x \in E / \mathcal{P}(x)\}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in E, x \in F \iff \mathcal{P}(x).$$

Exemple 2 : L'ensemble des naturels pairs peut être défini par extension $\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8; \dots\}$ et par compréhension $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$.

Exercice 1 : Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

- 1 l'ensemble des naturels impairs,
- 2 la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) vérifiant $y = f(x)$),
- 3 la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.

3 Induction structurelle :

C'est se donner un certain nombre d'éléments de E , et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 : L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E , pq est dans E .

- 4 **Par construction** : Unions, intersections d'ensembles. Nous reverrons ce principe.

Exemple 4 : Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note \mathcal{D}_a l'ensemble des diviseurs de a .

Alors, pour tous entiers a et b , $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b .

I.2 Inclusion d'ensembles

Définition 3 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Un ensemble A est dit *inclus* dans un ensemble B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est aussi un élément de B.

On dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B ou une *partie* de B.

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

Exemple 5 : $\{-2, 5\} \subset \mathbb{Z}$ et $\{1, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$.

Remarque : La notion de singleton nous donne un lien entre appartenance et inclusion :

Soit E un ensemble et a un objet. Alors :

$$a \in E \iff \{a\} \subset E.$$

Au bon usage des symboles \in et \subset :

ATTENTION

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $F \subset E$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $F \notin E$.
- ET un élément n'est pas inclut dans un ensemble : $x \not\subset E$.

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$.

On dit que l'inclusion est *transitive*.

Exercice 2 : Compléter les propositions suivantes avec le symbole \in ou \subset .

1 $\emptyset \dots \{1, 2, 3, 4\}$

2 $1 \dots \{1, 2, 3, 4\}$

3 $\{1\} \dots \{1, 2, 3, 4\}$

Proposition 1 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

$$A \subset B \iff (\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)).$$

Méthode 1 (Montrer $A \subset B$) :

- On considère un élément quelconque de A, par exemple, vérifiant une certaine propriété \mathcal{P} et on montre qu'il appartient à B, par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété \mathcal{Q} .

ou

- On considère un élément n'appartenant pas à B et on montre qu'il ne peut appartenir à A.

Exercice 3 : Montrer que $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\} \subset [-2; 2]^2$.

I.3 Égalité d'ensembles

Définition 4 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On dit que les ensembles A et B sont égaux, noté $A = B$, s'ils ont exactement les mêmes éléments.

L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$\begin{aligned} A = B &\iff (A \subset B \text{ et } B \subset A) \\ &\iff (\forall x, x \in E \iff x \in F). \end{aligned}$$

Dans le cas d'ensembles A et B respectivement définis par deux propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q} , l'égalité des ensembles équivaut à l'équivalence des propriétés :

$$A = B \iff \forall x \in E, \mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x).$$

Méthode 2 (Égalité de deux ensembles) :

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procèdera donc par double inclusion ou directement par équivalence.

Exercice 4 : Soient $a \leq b$ deux réels. Montrer que $[a; b] = \{(1-t)a + tb / t \in [0; 1]\}$.

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $A \not\subset B \iff \exists x \in A / x \notin B \iff \exists x \in A / x \in \bar{B}$.
- $A \neq B \iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \iff \exists x \in A / x \notin B \text{ ou } \exists x \in B / x \notin A$.

Exemple 6 : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Proposition 3 :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Remarque : Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés *irrationnels*. Leur ensemble est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (« \mathbb{R} privé de \mathbb{Q} »).

Exercice 5 (Vrai ou Faux ?) :

- 1 La somme de deux rationnels est un rationnel.
- 2 Le produit de deux rationnels est un rationnel.
- 3 La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
- 4 Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
- 5 La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

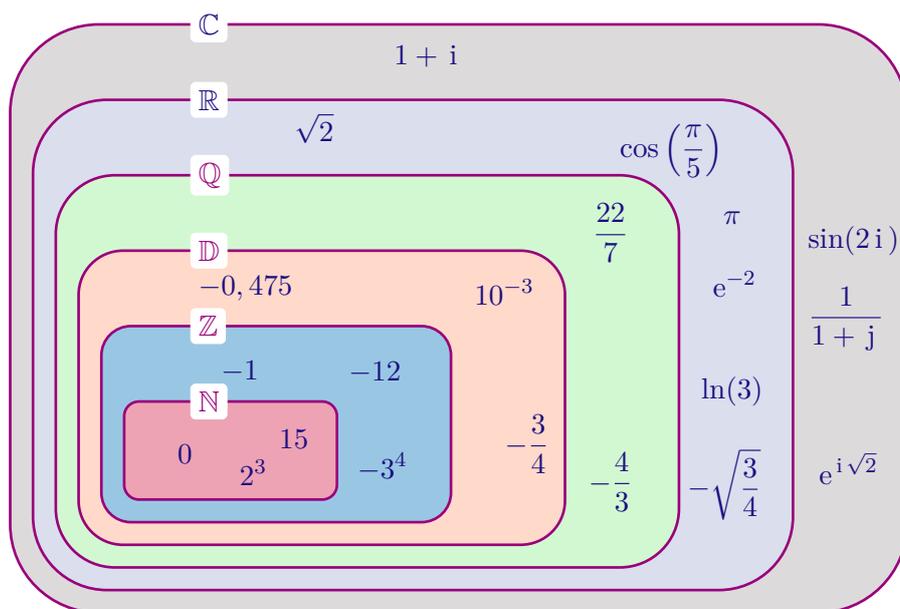


Figure II.1 – Les ensembles de nombres usuels

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 : Si A est inclus dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Il contient en particulier la partie vide \emptyset et la partie *pleine* E donc $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites *propres* ou *strictes*.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

ATTENTION

Si A est un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dont l'appartenance est notée avec le symbole \in , A est un sous-ensemble de E marqué par le symbole \subset .

Exemples 1 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Exercice 6 : Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathcal{P}([a; b])$.

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E, on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E, notés par des petites lettres x, y, a, \dots
- celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(E)$, notées par des majuscules droites : $A = \{x, y\}, \dots$

- celui des ensembles de parties de E , inclus dans $\mathcal{P}(E)$ *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, notés par des majuscules cursives : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, ...

II ENSEMBLES ET FONCTIONS

II.1 Vocabulaire usuel

Définition 6 (Ensemble de définition, image et antécédents) : Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition* de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in E$ est appelé une valeur de f .

Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, si $y = f(x)$, on dit que y est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de y par f .

On dira souvent que $f : E \mapsto F$ est à valeurs dans F mais sans suggérer que tous les éléments de F sont atteints.

II.2 Images directes par une application

Définition 7 : Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E .

On appelle *image* (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x_y \in A, f(x_y) = y\} \subset F.$$

Si $f(A) \subset A$, on dit que A est *stable* par f .

Vocabulaire : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On appelle *ensemble image* de f , noté imf ou $f(E)$, l'ensemble de toutes les images de E par f . C'est donc une partie de F et plus précisément c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E *i.e.*

$$imf = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On fera attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image $f(E) \subset F$.

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9]$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f . $[-1; 0]$ ne l'est pas.
$$x \qquad \qquad \qquad x^2$$
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,

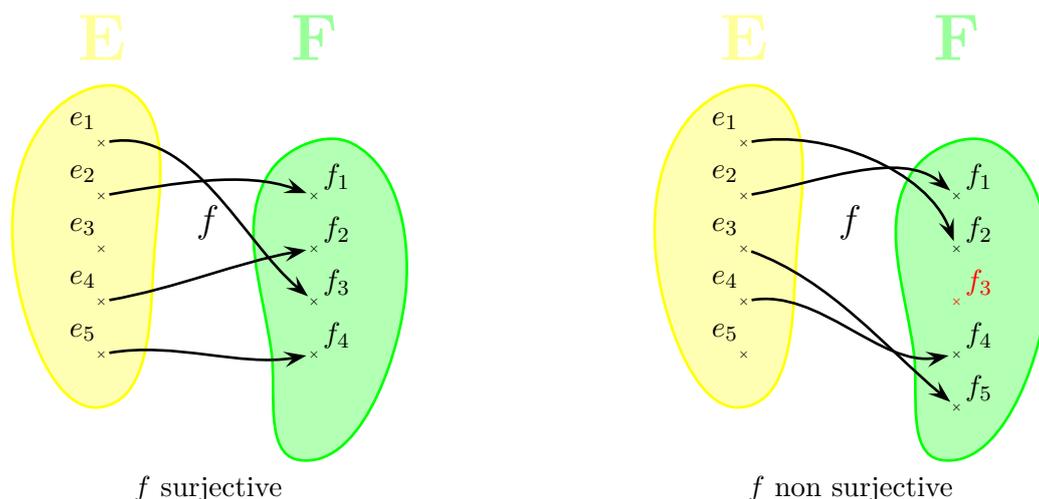


Figure II.3 – Diagramme sagittal d’une fonction surjective.

Et d’une manière générale très importante :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ dans } F \iff \text{im}f = F \iff f(E) = F.$$

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E.
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ n’est pas surjective.
- Si $f : E \mapsto F$ est une application, alors f induit une surjection entre E et $\text{im}f$ qui est l’application :

$$g : E \rightarrow \text{im}f$$

$$x \quad g(x) = f(x).$$

- La projection $p_E : E \times F \mapsto E$ est surjective.

$$(x; y) \quad x$$

Méthode 3 (Montrer qu’une fonction est surjective) :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F.

Pour montrer que f est surjective de E sur F, on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 : Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

1 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
 $x \quad x^2$

3 $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
 $x \quad 2x$

2 $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$
 $x \quad x^2$

4 $k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$
 $n \quad 2n$

Définition 9 (Injection) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une *injection* (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l’ensemble d’arrivée a au plus un antécédent dans l’ensemble de départ.

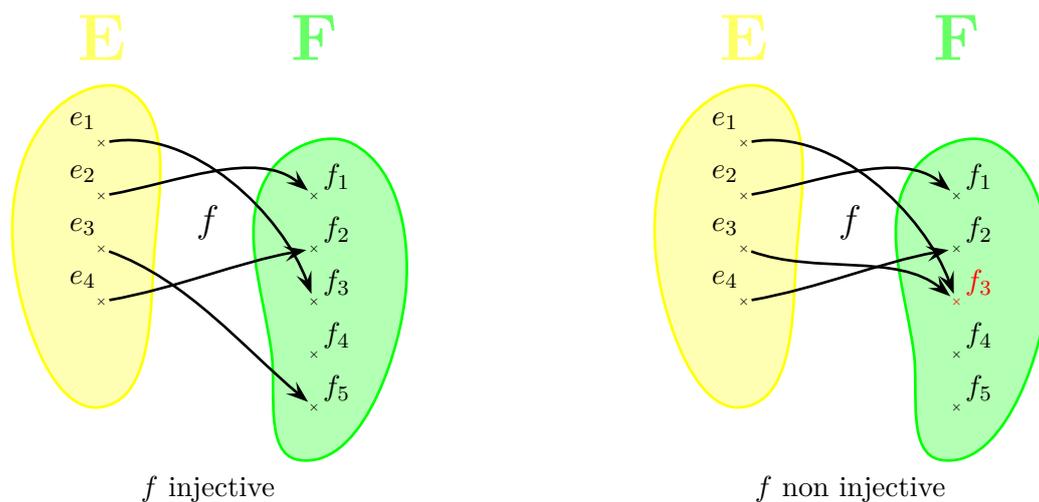


Figure II.4 – Diagramme sagittal d'une fonction injective.

La **définition (9)** revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E .

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.
- Soit A une partie non vide de E , l'application $i : \begin{matrix} A & \longmapsto & E \\ x & & x \end{matrix}$ est injective d'où son nom d'*injection canonique* de A dans E .
- La fonction \ln est une injection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} de même que sa fonction réciproque \exp qui l'est de \mathbb{R} dans $]0; +\infty[$.
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas une injection de \mathbb{R} .

Théorème 4 : $f : E \mapsto F$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall (x; y) \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Corollaire 4.1 : Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

Exemple 11 : La fonction $x \mapsto x^2$ est injective sur \mathbb{R}_+ mais pas sur \mathbb{R} .

Méthode 4 (Montrer qu'une fonction est injective) :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est injective sur E , on considère deux éléments x et y de E tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

Exercice 9 : Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$\boxed{1} \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \qquad \qquad \cos(x)$$

$$\boxed{2} \quad g : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \qquad \qquad \cos(x)$$

$$\boxed{3} \quad k :]-\pi; 0] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \qquad \qquad \cos(x)$$

II.3 Images réciproques par une application

Définition 10 : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F .

Image directe : Soit A une partie de E .

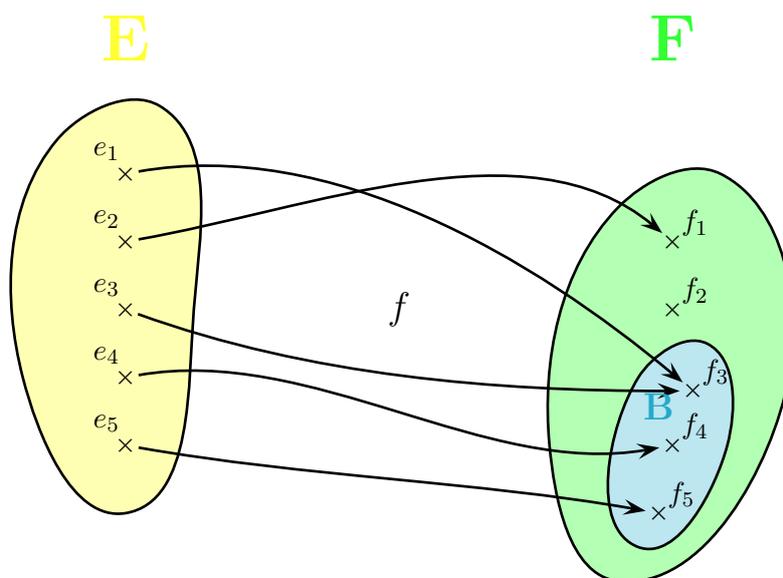
On appelle *image* de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x_y \in A, f(x_y) = y\} \subset F.$$

Si $f(A) \subset A$, on dit que A est *stable* par f .

Image réciproque : Soit B une partie de F .

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$



$$f^{-1}(B) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}.$$

Figure II.5 – Image directe et réciproque d'une partie par une application.

Exemple 12 : Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ alors $f^{-1}(]1; 3]) = [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]$.

$$x \qquad x^2$$

ATTENTION

La notation f^{-1} peut porter à confusion avec la fonction réciproque d'une fonction bijective f . On ne suppose nullement ici que f est bijective dans la définition de $f^{-1}(B)$ mais lorsque f le sera on pourra ultérieurement vérifier que l'image réciproque de B par f correspond à l'image directe de B par f^{-1} .

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ Déterminer :

$$x \qquad \cos x$$

- 1 $f(\mathbb{R})$.
- 2 $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- 3 $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- 4 $f^{-1}(\{1\})$.
- 5 $f^{-1}(]-1; 2])$.
- 6 $f^{-1}([0; \pi])$.
- 7 $f(f^{-1}([0; 1]))$.
- 8 $f^{-1}\left(f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$.

Théorème 5 (Stabilité par image directe) : Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

- 1 $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- 2 $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) : Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de F , on a :

- 1 $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- 2 $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

III OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E .

III.1 Complémentarisation

Définition 11 : Le *complémentaire* d'un ensemble A (dans E), noté $\complement_E A$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A .

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in \complement_E A \iff x \notin A$.

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

[2]. $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E / f(x) \in f(A)\}$



Figure II.6 – Complémentaire d'une partie.

Remarque : La notion de complémentarité dépend de l'ensemble de référence E donc attention aux velléités trop hâtives de remplacer la notation $\complement_E A$ par \overline{A} .

Exercice II : Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

On considère $A = \{1, 2\}$. Déterminer $\complement_E A$ et $\complement_F A$.

Proposition 7 :

- $\complement_E E = \emptyset$.
- $\forall A \subset E, \complement_E(\complement_E A) = A$.
- $\complement_E \emptyset = E$.

La dernière propriété se dit, que la complémentarisation est une opération involutive^[3]

III.2 Intersection

Définition 12 : L'*intersection* de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E , noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

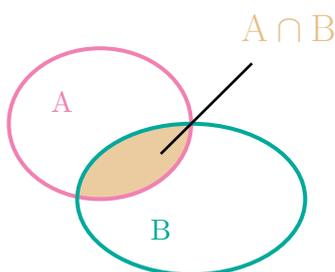


Figure II.7 – Intersection d'ensembles.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$.

L'intersection est aux ensembles ce que la *conjonction* est aux propriétés.

Exemples 13 : $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\}$ et $[1; 3] \cap]2; 4] =]2; 3]$.

[3]. Comme la conjugaison dans \mathbb{C} , la symétrie axiale dans le plan ou l'inversion sur les réels non nuls.

Proposition 8 (Propriétés algébriques) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

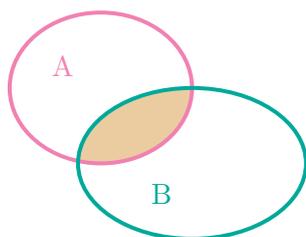
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$. (\emptyset est absorbant pour \cap)
- $A \cap E = A$. (E est élément neutre pour \cap)
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$. (A et \bar{A} sont disjoints dans E)

Définition 13 (Ensembles disjoints) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

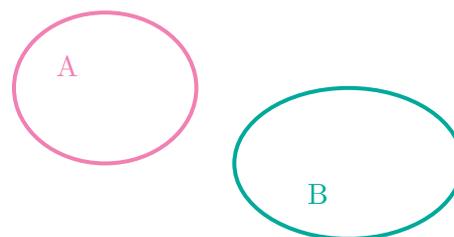
- On dit que A et B sont *disjoints* ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont *distincts* lorsqu'ils ne sont pas égaux.

Comme on l'a vu, un sous-ensemble et son complémentaire dans E sont toujours disjoints.

Remarque : \emptyset est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! À part ça, disjoint implique distinct.



A et B ne sont pas disjoints



A et B sont disjoints

A et B sont distincts.

Figure II.8 – Ensembles disjoints et distincts.

Proposition 9 : Soient A et B deux sous-ensembles de E .

$$A \text{ et } B \text{ sont disjoints} \iff A \cap B = \emptyset \iff A \subset \complement_E B \iff B \subset \complement_E A.$$

$$A \text{ et } B \text{ sont distincts} \iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \\ \iff \text{il existe un élément appartenant à l'un des} \\ \text{ensembles et pas à l'autre.}$$

Théorème 10 (Stabilité par image directe et réciproque) : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour toute parties A et B de E , on a :

$$\boxed{1} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

$$\boxed{2} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Contre-Exemple 14 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

$$x \qquad \qquad x^2$$

Alors $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \neq f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.

III.3 Réunion

Définition 14 : La *réunion* de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

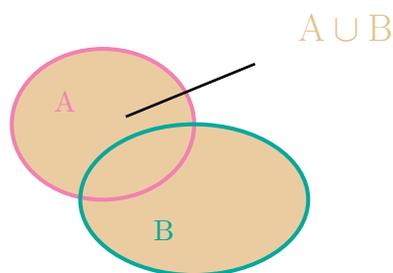


Figure II.9 – Réunion d'ensembles.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$.

La réunion est aux ensembles ce que la *disjonction* est aux propriétés.

Proposition 11 (Propriétés algébriques) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$. (\emptyset est neutre pour \cup)
- $A \cup E = E$. (E est élément absorbant pour \cup)
- $A \cup \bar{A} = E$. (A et \bar{A} recouvrent E)

Exercice 12 :

1 Simplifier $[1; 3] \cup]2; 4]$.

2 Résoudre, dans \mathbb{R} , l'inéquation $\frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$.

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) : Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E, on a :

1 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2 $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A.$
- $A \cap B = B \cap A.$

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B.$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$

Associativité

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

Sous-ensemble

- $\complement_E(E) = \emptyset$ et $\complement_E(\emptyset) = E$
- $\complement_E \complement_E A = A$ et $A \cup \complement_E A = E.$
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \complement_E B \subset \complement_E A.$

L'équivalence $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ est aux ensembles ce qu'est aux propriétés l'équivalence entre une propriété et sa contraposée.

III.4 Différence

Définition 15 : La *différence* des ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B.$$

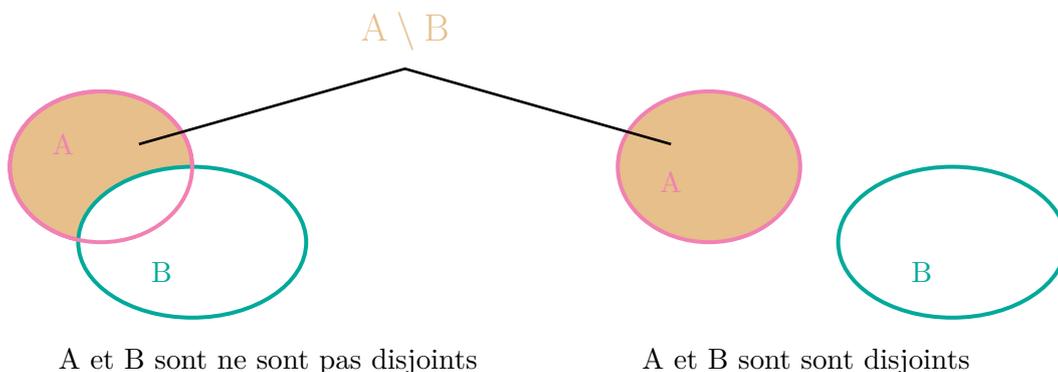


Figure II.10 – Différence de deux ensembles.

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes non réels. Cet ensemble contient strictement l'ensemble des imaginaires purs non nuls $i\mathbb{R}^*$.^[4]

Résumé et analogie :

$\cup \equiv \vee$	$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$
$\cap \equiv \wedge$	$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$
$\complement \equiv \neg$	$x \in \complement B \iff \neg(x \in B)$
$\subset \equiv \implies$	$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$
$= \equiv \iff$	$A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$

IV FAMILLE D'ENSEMBLES

IV.1 Réunion et intersection

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque^[5].

Définition 16 (Unions et intersections infinies) :

- La *réunion* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i_x \in I, x \in A_{i_x}\}.$$

- L'*intersection* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Exemples 16 :

- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$.
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; (2n+1)\pi]$.

On montrera plus tard que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right] = [0; 1]$.
- $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0; 1]$.
- $\bigcap_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 \right] = \{1\}$.

[4]. De la même manière que 0 est l'unique réels à être positif et négatif, c'est le seul nombre complexe à être réels et imaginaire pur.

[5]. La notion de famille sera vue ultérieurement.

Proposition 14 : Étant donné $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E .

Distributivité :

$$\blacksquare B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

$$\blacksquare B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

Lois de Morgan :

$$\blacksquare \complement_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\complement_E A_i).$$

$$\blacksquare \complement_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (\complement_E A_i).$$

Exercice 13 : Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

$$\boxed{1} \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \text{ et } \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$\boxed{3} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \text{ et } \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

$$\boxed{2} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \text{ et } \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

$$\boxed{4} \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \text{ et } \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.

Proposition 15 : Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Pour tout y de F , les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = E$.

IV.2 Notion de partition

Définition 17 : Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

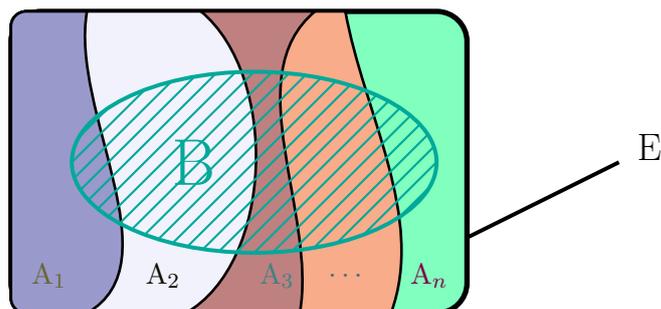
- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$
- et $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

Les sous-ensembles A_i s'appellent les *composantes* de la partition.

Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $I \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.

On note $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ pour signifier la réunion disjointe.

Remarque : Des ensembles d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ tels que $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ sont dits *deux à deux disjoints*.



$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \dots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure II.11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.

On a alors $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ mais la réciproque est fautive.

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le **théorème (8)** et le **théorème (11)**, on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
Donc, A et \bar{A} forment une *partition* de E .
- Soit $f : E \rightarrow F$ une application.
D'après la **proposition (15)**, si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .
- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de \mathbb{Z} .
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de \mathbb{R} .
- Si $E \neq \emptyset$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.
- La famille d'intervalles $\{[n; n + 1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de \mathbb{R} .

Exercice 14 : Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

- 1 $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$
2 $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$
3 $\{\{a\}, \{c\}\}$
4 $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

V PRODUIT CARTÉSIEN

Définition 18 (Produit cartésien) : Étant donnés n ensembles E_1, \dots, E_n .

On appelle *produit cartésien* ^[6] des ensembles E_1, \dots, E_n , noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ (ou $\prod_{i=1}^n E_i$), l'ensemble de tous les n -uplets (x_1, \dots, x_n) dont la i -ème coordonnée est un élément de E_i .

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

[6]. en l'honneur de Descartes qui a, le premier, dégagé la notion de coordonnées.

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 : $\mathbb{R}^n = \{(x_1; \dots; x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}\}$.

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

— (x_1, \dots, x_n) est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

— $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel

• l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_n, \dots, x_1\},$$

• le nombre d'apparitions des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1, x_1, \dots, x_n\}.$$

ATTENTION

Exemples 19 :

- $(1; 2)$ est un couple différent de $(2; 1)$. L'ensemble $\{1, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2, 1\}$.
- $(1; 1)$ est un couple et $\{1, 1\} = \{1\}$ un singleton.
- Pour $A = \{a; b\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$, on a :

$$A \times B = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}.$$

$A \times B$	1	2	3
a	$(a; 1)$	$(a; 2)$	$(a; 3)$
b	$(b; 1)$	$(b; 2)$	$(b; 3)$

Remarque :

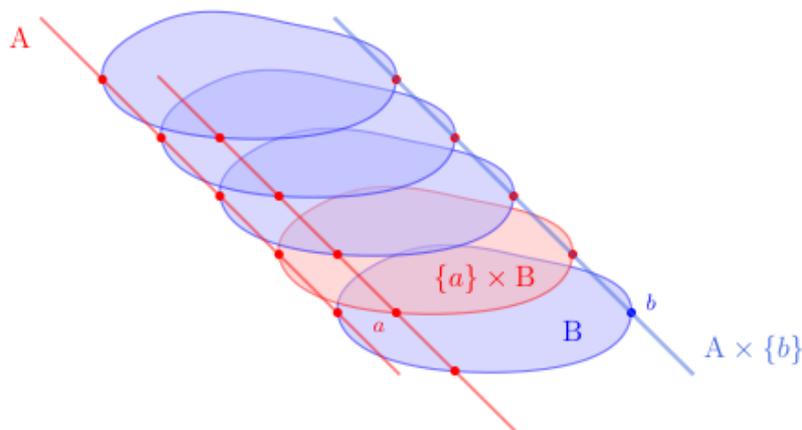


Figure II.12 – Sections de $A \times B$.

D'un point de vue formel, on a donc l'équivalence :

$$\forall x \in E, \forall y \in F \iff \forall (x; y) \in E \times F.$$

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x; y)$ est noté \mathbb{R}^2 . On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x; y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x; y)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p; q)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- Le cercle trigonométrique $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un produit cartésien. Il ne peut pas s'écrire sous la forme $A \times B$ où A, B sont deux parties de \mathbb{R} .

Proposition 16 : Soit E, E' et F des ensembles.

Alors :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \vee (F = \emptyset)$
- $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$.
- $(E \cap E') \times F = (E \times F) \cap (E' \times F)$.

ATTENTION

En général, $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

Dans \mathbb{R}^2 , par exemple, $([0; 1] \times [0; 1]) \cup ([-1; 0] \times [-1; 0])$ est différent de l'ensemble $[-1; 1] \times [-1; 1]$.



Figure II.13 – $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Exemples 21 :

- $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3); (1; 2; 1); \\ (1; 2; 2); (1; 2; 3) \end{array} \right\}$.
- Hachurer dans le plan $([0, 1] \cup [2, 3]) \times [0, 3]$.