Nom : .... **Prénom :** ....

Logique et Raisonnement

Exercice I (Cours) : Compléter

1 Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x » .

Ainsi la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

2 La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, appelée *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.

3 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

— non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$).

— non ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) $\iff$ $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).

1 Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

$\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} =$ .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs l'expression suivante :

f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.................................

$\boxed{\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)}$

3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nier, de la manière la plus précise possible, l'énoncé suivant :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$... $\boxed{\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > 1}$

4 Écrire la négation de l'assertion suivante où $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont des propositions.

$\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) : .... $\boxed{\text{non } \mathcal{P} \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ ou non } \mathcal{R})}$

5 Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $6^n + 1$ est multiple de 5 » est héréditaire.

Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

....

....

....

....

....

....

Nom : .... **Prénom :** ....

Logique et Raisonnement

Exercice 1 (Cours) : Compléter

1. Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».

   La proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

2. La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, appelée *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

3. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :
   - non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$).
   - non $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{P} \wedge \text{non } \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \text{non } \mathcal{P})$.

     Commentaires :

$$\begin{aligned}
\textit{non } (\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}) &\iff \textit{non } ((\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})) \\
&\iff \textit{non } ((\textit{non } \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\textit{non } \mathcal{Q} \vee \mathcal{P})) \\
&\iff (\textit{non } (\textit{non } \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \textit{non } \mathcal{P})) \\
&\iff ((\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \implies (\mathcal{Q} \wedge \textit{non } \mathcal{P})) \\
&\iff ((\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \implies \textit{non } (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}))\,.
\end{aligned}$$

1 Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} =$ .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

2 Soient les nombres réels x_1, x_2, ..., x_n. Traduire en langage formalisé la phrase suivante :

Les x_i sont non tous nuls : .... $\boxed{\exists\, i \in [\![1\,;n]\!] \;/\; x_i \neq 0}$

3 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Nier, de la manière la plus précise possible, l'énoncé suivant :

Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$. .... $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0}$

4 Écrire la négation de l'assertion suivante où P, Q et R sont des propositions.

P ou (Q et non R) : .... $\boxed{\text{non P et (non Q ou R)}}$

5 Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $6^n - 1$ est multiple de 5 » est héréditaire.

Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

....

....

....

....

....

....