Ensembles

2 **1** Donner la forme factorisée de $2x^2 - 3x - 5$: $(x+1)(2x-5)$.

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles.

2 Compléter les définitions suivantes :

1 (a) Pour tout $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F} \,/\, \exists x \in \mathrm{A},\, y = f(x)\}$.

1 (b) Pour toutes parties A et B de E, $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, x \in \mathrm{B} \text{ et } x \notin \mathrm{A}\} = \{x \in \mathrm{B} \,/\, x \notin \mathrm{A}\}$.

2 (c) Pour toute famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties de E,

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \,/\, \exists i_x \in \mathrm{I},\ x \in \mathrm{A}_{i_x}\}.$$

2 **3** Pour toutes parties A et B de F montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f^{-1}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.

Cf. cours

2 **4** Pour toutes parties A et B de E montrer que $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

Cf. cours

2 **5** Pour toutes parties A et B de E, a-t-on l'égalité $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$?

Si oui, le prouver. Si non donner un contre-exemple.

Cf. cours

3 **6** Pour toute famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties de E, monter que $\complement_{\mathrm{E}}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}_i)$.

Cf. cours

5 **7** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer par récurrence que $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 1 = 5$ donc $2 \leqslant u_1 \leqslant 5$ et la propriété est initialisée pour $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 \leqslant u_m \leqslant 5$.

Alors, $1 \leqslant \dfrac{1}{2}u_m \leqslant \dfrac{5}{2}$ puis $2 \leqslant \dfrac{1}{2}u_m + 1 \leqslant \dfrac{5}{2} + 1 = \dfrac{7}{2} \leqslant 5$.

D'où $2 \leqslant u_{m+1} \leqslant 5$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée pour $n = 1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ensembles

2 $\boxed{1}$ Donner la forme factorisée de $7x^2-4x-3$: $(x-1)(7x+3)$.

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles.

$\boxed{2}$ Compléter les définitions suivantes :

1 (a) Pour tout $\mathrm{B}\subset\mathrm{F}$, $f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x\in\mathrm{E} \,/\, f(x)\in\mathrm{B}\}$.

1 (b) Pour toute partie A de E, $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \{x\in\mathrm{E}\, x\notin\mathrm{A}\}$.

2 (c) Pour toute famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties de E,

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i = \{x\in\mathrm{E} \,/\, \forall\, i\in\mathrm{I},\ x\in\mathrm{A}_i\}.$$

2 $\boxed{3}$ Pour toutes parties A et B de E montrer que $\mathrm{A}\subset\mathrm{B} \implies f(\mathrm{A})\subset f(\mathrm{B})$.

Cf. cours

2 $\boxed{4}$ Pour toutes parties A et B de E montrer que $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\subset f(\mathrm{A})\cup f(\mathrm{B})$.

Cf. cours

2 $\boxed{5}$ Pour toutes parties A et B de E, a-t-on l'égalité $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cup f(\mathrm{B})$?

Si oui, le prouver. Si non donner un contre-exemple.

Cf. cours

3 $\boxed{6}$ Pour toute famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties de E, monter que $\complement_{\mathrm{E}}\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i\right) = \bigcap_{i\in\mathrm{I}}(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}_i)$.

Cf. cours

5 $\boxed{7}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n+4$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrer par récurrence que $1\leqslant u_n\leqslant 4$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_1=4$ donc $1\leqslant u_1\leqslant 4$ et la propriété est initialisée pour $n=1$.

Supposons qu'il existe un entier $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $1\leqslant u_m\leqslant 4$.

Alors, $-\dfrac{4}{3}\leqslant -\dfrac{1}{3}u_m\leqslant -\dfrac{1}{3}$ puis $\dfrac{8}{3}\leqslant -\dfrac{1}{3}u_m+4\leqslant\dfrac{11}{3}$.

D'où $1\leqslant u_{m+1}\leqslant 4$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée pour $n=1$, elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.