Ensembles

Exercice 1 : Montrer que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$.

1. $a = 8,313131\ldots \in \mathbb{Q}$
2. $b = 1,24242424\ldots$
3. $c = 123,32576576576576\ldots$
4. $d = 0,142857142857\ldots$
5. $e = 0,99999999999\ldots$

Correction : $100a = 831,313131\ldots$ donc $100a - a = 823 \implies a = \dfrac{823}{99} \in \mathbb{Q}$.

De la même manière,

1. $b = \dfrac{41}{33}$.
2. $c = \dfrac{342229}{2775}$.
3. $d = \dfrac{1}{7}$.
4. $e = 1$.

Exercice 3 : Montrer que $\{x^2 + x + 1 \,/\, x \in \mathbb{R}\} \subset \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4 : On considère les ensembles A et B définis respectivement par les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ci dessous. Quelles sont les inclusions possibles ?

1. $\mathcal{P}: \ y = x^2$ et $\mathcal{Q}: \ y^2 = x^4$.
2. $\mathcal{R}: \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}$ et $\mathcal{S}: \ y^2 \leqslant 1 - x^2$.

Exercice 5 : Montrer que les ensembles $\mathrm{A} = \mathbb{R}_-$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, y \in \mathbb{R}_+,\ y \geqslant x\}$ sont égaux.

Exercice 6 : Montrer que :

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
2. $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$

Correction :

1. Supposons le contraire i.e. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

   Alors $\sqrt{3} + \sqrt{6} = r - \sqrt{2}$.

   En élevant au carré, $3 + 6\sqrt{2} + 6 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 \iff (6 + 2r)\sqrt{2} = r^2 - 7$.

   Comme $r \geqslant 0$ alors $6 + 2r \neq 0$.

   On en déduit que $\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 7}{6 + 2r}$.

   Or,
   - la somme de deux rationnels est un rationnel ;
   - le produit de deux rationnels est un rationnel ;
   - le quotient de deux rationnels (avec un dénominateur non nul) est un rationnel.

   Donc $\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 7}{6 + 2r} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas.

   Conclusion : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
2. Raisonnement identique.

Exercice 8 :

1. $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Déterminer son image $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$ pour $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln x \end{array}$.

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1. $g_1 : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$
2. $g_2 : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$
3. $g_3 : [0\,;\pi] \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$
4. $g_4 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+3x+5$
5. $g_5 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$
6. $g_6 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
7. $g_7 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+1|$
8. $g_8 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+2|+|x-3|$
9. $g_9 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+2|-|x-3|$
10. $g_{10} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto x+\cos x$

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Déterminer les images directe et réciproque des parties suivantes :

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}_+$.
3. $\{3\}$.
4. $\{-7\}$.
5. $[-2\,;0[$.
6. $[-1\,;4]$.
7. $]-4\,;-2[\cup[1\,;3]$.

Exercice 11 : Soit f une application sur un ensemble E.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si pour toute partie A de E, $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) \subset \complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A})$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si pour toute partie A de E, $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A}) \subset f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$.
3. Cas d'égalité ?

Correction :

1. Pour le sens direct, supposons f injective sur E et considérons une partie A quelconque de E.

   Pour tout $y \in f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$ i.e. $\exists\, x \notin \mathrm{A},\ y = f(x)$.

   Si $y \in f(\mathrm{A})$ alors il existe $x' \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x')$.

   L'injectivité de f entraînerait alors que $x = x'$ et la contradiction.

   Donc $y \notin f(\mathrm{A})$ et $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) \subset \complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A})$.

   Réciproquement, considérons deux éléments x, x' de E distincts i.e. $x' \notin \{x\}$.

   Par hypothèse, $f(x') \notin f(\{x\}) \iff f(x) \neq f(x')$ et l'injectivité de f sur E
2. De la même manière, supposons f surjective sur E et considérons une partie A quelconque de E.

   Soit $y \notin f(\mathrm{A})$. Comme f est surjective, y admet un antécédent $x \in \mathrm{E}$ par f.

   Comme $y \notin f(\mathrm{A})$, x ne peut appartenir à A i.e. $y \in f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$ et le résultat.

   Réciproquement, si f n'est pas surjective sur E, $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{E}) \neq \varnothing$ et $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{E})$ qui le contient non plus. Ce qui est impossible.

   Donc f est surjective sur E.
3. D'après les questions précédentes, f est bijective sur E si, et seulement si $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A}) = f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$.

Exercice 13 : Soient E et F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

Démontrer que $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{F}),\quad f^{-1}(\mathrm{F}\setminus\mathrm{A}) = \mathrm{E}\setminus f^{-1}(\mathrm{A})$ *i.e.* $f^{-1}(\complement_{\mathrm{F}}\mathrm{A}) = \complement_{\mathrm{E}}(f^{-1}(\mathrm{A}))$.

Correction : Par équivalence, on a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A}) &\iff f(x) \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{A} \iff f(x) \in \mathrm{F} \text{ et } f(x) \notin \mathrm{A} \\ &\iff x \in f^{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E} \text{ et } x \notin f^{-1}(\mathrm{A}) \iff x \in \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Exercice 15 : Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exprimer celui de e^f, $\sqrt{f}$ et $\ln(f)$ en fonction de $\mathcal{D}_f$.

Exercice 16 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Montrer que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Exercice 17 : Montrer que l'inclusion $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$ est une égalité si, et seulement si f est injective.

Exercice 18 : Soient A, B et C des ensembles. Montrer par la contraposition les deux propositions suivantes :

1. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}$.
2. $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \implies \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Remarque : Les sens réciproques sont clairs.

Correction :

1. Si A et B sont distincts alors il existe $a \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$.

   Il en vient que $a \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $a \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Ces deux ensembles sont distincts.
2. De la même manière, soit $\mathrm{B} \neq \mathrm{C}$ et $b \in \mathrm{B} \setminus \mathrm{C}$.

   Par disjonction de cas, si $b \in \mathrm{A}$ alors $b \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ mais $b \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ i.e. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$.

   Si $b \notin \mathrm{A}$ alors $b \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ mais $b \notin \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ i.e. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$.

   On vient bien de montrer que :

$$\mathrm{B} \neq \mathrm{C} \implies (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \text{ ou } (\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cup \mathrm{C}).$$

Exercice 20 : Soient A, B, C trois ensembles.

Montrer que $\quad \mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$.

Exercice 21 : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Montrer que $\complement(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \complement\mathrm{A} \cap \complement\mathrm{B}$ et $\complement(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \complement\mathrm{A} \cup \complement\mathrm{B}$.

Exercice 22 : Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}$,
2. $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \implies \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Exercice 23 : Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{G}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \iff \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{E}).$$

En déduire que :

$$(\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \cap \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{G} = \varnothing).$$

Exercice 24 : Démontrer les propriétés suivantes (on note $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$ l'ensemble $\mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{B}}$ constitué des éléments appartenant à A mais pas à B) :

1. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$
2. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
3. $B \subset A \Leftrightarrow \forall X \subset E, (A \cap X) \cup B = A \cap (X \cup B)$

Exercice 25 : Soit A, B, C trois parties de E tel que $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ et $(A \cap B) \subset (A \cap C)$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 26 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \implies A = B = C$
2. Montrer que : $\begin{cases} (B \setminus C) \subset A \\ (C \setminus D) \subset A \end{cases} \implies (B \setminus D) \subset A$

Correction : Soit $x \in A$.
Alors $x \in A \cup C = C \cap B \subset B$ donc $A \subset B$.
Soit $x \in B$.
Alors $x \in B \cup A = A \cap C \subset C$ donc $B \subset C$.
Soit $x \in C$.
Alors $x \in B \cup C = B \cap A \subset A$ donc $C \subset A$.
On a donc montré successivement $A \subset B \subset C \subset A$ i.e. $A = B = C$ par transitivité et double inclusion.

Exercice 28 : Soient $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E et $B \subset E$ un sous-ensemble non-vide de E.

Montrer que $(B \cap A_i)_{i \in I}$ forme une partition de B.

Exercice 29 : Soient E un ensemble, $n \geqslant 1$ un entier et A_1, ..., A_n des parties de E telles que :

- $A_1 = \varnothing$
- $A_n = E$.
- $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$.

On pose, $\forall k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$.

Montrer que $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme une partition de E.

Correction : Par construction, $\forall k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $B_k \neq \varnothing$. Pour montrer que $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme une partition de E, il suffit donc de vérifier deux conditions : l'union des B_k est égale à E, et les B_k sont deux à deux sont disjoints.

Montrons d'abord que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k = E$:

Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, et tout $x \in B_k$, $x \in A_k \subset A_n = E$ donc l'inclusion $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \subset E$ est claire.

Réciproquement soit $x \in E$ et posons $K_x = \{k \in [\![1\,;n-1]\!]\,, x \in A_{k+1}\}$.

Comme $A_n = E$, $x \in A_n$ i.e. $n \in K_x$ qui est donc une partie non vide et majorée (par $n-1$) de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément k_0.

Par définition, $x \in A_{k_0+1}$ et $x \notin A_{k_0}$ i.e. $x \in B_{k_0}$. L'inclusion réciproque est donc prouvée d'où l'égalité.

Remarque : Comme $A_1 = \varnothing$ et $A_n = E$, une autre méthode serait de montrer, par récurrence (itération ici plutôt) que

$$E = A_n \setminus A_1 = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup (A_{n-1} \setminus A_1) = \ldots = \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} \setminus A_k) = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k.$$

Ensuite, montrons que les B_k sont disjoints deux à deux :

Supposons qu'il existe $i, j \in 1, 2, \ldots, n-1$ tels que $i \neq j$ et $B_i \cap B_j \neq \varnothing$. Cela signifie que B_i et B_j partagent au moins un élément x.

Sans perte de généralité, supposons que $i < j \iff i+1 \leqslant j$.

Comme $x \in B_i$ alors $x \in A_{i+1} \subset A_j$. Mais $x \in B_j \implies x \notin A_j$.

D'où la contradiction si les B_k ne sont pas disjoints deux à deux.

La famille $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme donc une partition de E.

Exercice 31 : Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de parties* E si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{A}$ n'est pas vide.
- Si $X \in \mathcal{A}$, alors $E \setminus X$ aussi.
- $\mathcal{A}$ est stable par union finie, autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille U_1, ..., U_n d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de parties de E.
2. Montrer qu'une algèbre de parties de E est stable par intersection finie.
3. Combien d'algèbres de parties y a-t-il si E a exactement trois éléments ?