Arithmétique

Exercice 1 : Déterminer les entiers naturels n et m qui vérifient :

1. $n^2 + n = 20$.
2. $n^2 + 2n = 35$.
3. $n^2 - m^2 = 9$.
4. $nm - 5n - 5m - 7 = 0$.

Correction :

3. Il est naturel de factoriser : $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$.

   Ainsi, $n-m$ et $n+m$ sont nécessairement des diviseurs de 9.

   Or, l'ensemble des diviseurs naturels de 9 sont 1, 3 et 9.

   On réduit encore le champ d'investigation en remarquant que comme $n^2 - m^2$ est positif, avec n et m positifs alors nécessairement $n > m$. On en déduit alors que $n-m$ et $n+m$ sont positifs, et $n-m \leq n+m$.

   Il ne reste plus qu'à étudier les différentes possibilités :

   — Si $n-m=1$ alors $n+m=9$, d'où $n=5$ et $m=4$.
   — Si $n-m=3$ alors $n=m=3$ d'où $n=3$ et $m=0$.

   Finalement, il ne reste que deux couples solutions possibles : $(5;4)$ et $(3;0)$

   Comme on a raisonné par condition nécessaire, on vérifie que ces couples sont solutions du problème.

   Conclusion : $\mathscr{S} = \{(5;4);\ (3;0)\}$.

Exercice 3 : Déterminer les entiers n tels que :

1. 7 divise $n+3$.
2. $2n-5$ divise 6.
3. $2n-3$ divise $n+5$.
4. $n+1$ divise $3n-4$
5. $n+3|n+9$.

Correction :

1. 7 divise $n+3$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n+3=7k$, soit $n=7k+3$.
   L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S} = \{7k-3,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Les points à coordonnées entières de la droite passant par $(0\,;-3)$ et de coefficient directeur 7.
2. Les diviseurs de 6 sont -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 et 6.

   On résout les différentes équations sous la condition $2n-5 \leq 6$ et on trouve comme solutions : $\mathscr{S} = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$.
3. Si n un entier tel que $2n-3$ divise $n+5$ alors $2n-3$ divise aussi $2n+10$ et aussi la différence $(2n+10)-(2n-3)=13$.

   Les diviseurs de 13 sont -13, -1, 1 et 13. On en déduit que n vaut -5, 1, 2 ou 8.

   Réciproquement, ces nombres sont tels que $2n-3|n+5$.

   On obtient : $\mathscr{S} = \{-5,\ 1,\ 2\,8\}$.

Exercice 5 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que 2 divise $n(n+1)$.
2. Montrer que 3 divise $n(n+1)(n+2)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel a, 6 divise $a(a^2-1)$.

Exercice 6 : Montrer que $2^{3n}-1$ est multiple de 7.

Correction : Par récurrence puis $2^{3(n+1)} - 1 = 8 \times (7k+1) - 1 = 7 \times 8k + 7 = 7(8k+1)$ ou, plus joli, en factorisant :

$$2^{3n} - 1 = 8^n - 1^n = (8-1)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} 8^k\right)}_{\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 8 (Critère de divisibilité par 3, 9 et 11) : On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est $n = a_p \cdots a_1 a_0$ de sorte que :

$$n = a_p 10^p + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1. Montrer que n est multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.
2. Montrer que n est multiple de 9 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.
3. Montrer que n est multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Correction :

1. Comme $10 = 9+1$, d'après le binôme de Newton pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 3q_k + 1.$$

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 3\left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k\right) + \sum_{k=0}^{p} a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 3 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

2. Le raisonnement est identique à partir de $10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^k = 9q_k + 1$.
3. Une nouvelle fois, on utilise le binôme de Newton avec $10 = 11 - 1$:

$$10^k = (11-1)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k}{i} 11^{k-i} + \binom{k}{k}(-1)^k = 11q_k + (-1)^k.$$

D'où,

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = 11\left(\sum_{k=0}^{p} a_k q_k\right) + \sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_k.$$

L'entier n est donc multiple de 11 si, et seulement si $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 10 :

1. La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?
2. Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.
3. Trouver les entiers naturels n qui, divisés par 4, donnent un quotient égal au reste.
4. Le quotient d'un entier naturel x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ?

   En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.
5. Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+3$?
Même question avec $(n+5)^2$ et $n+3$.

Exercice 12 : Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, le nombre $n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

Correction :

$$\begin{aligned} n^4-8n^2+4 &= (n^4-4n^2+4)-(4n^2) \\ &= (n^2-2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2-2n-2)(n^2+2n-2) \\ &= [(n-1)^2-3][(n+1)^2-3] \end{aligned}$$

Dès que $n \geq 4$, les deux nombres $(n-1)^2-3$ et $(n+1)^2-3$ sont des diviseurs de n^4-8n^2+4 strictement supérieurs à 1.

Donc $\forall\, n \geq 4, \quad n^4-8n^2+4 \notin \mathbb{P}$.

Exercice 14 : Un entier naturel n a 15 diviseurs. On sait de plus que n est divisible par 6 mais pas par 8. Déterminer cet entier n.

Correction : On doit aborder ce genre d'exercice comme une chasse au trésor en lisant et utilisant **toutes** les informations de l'énoncé.

L'entier n a 15 diviseurs. Il faut donc connaître toutes les décompositions de 15 en facteurs supérieurs à 1. Il n'y a que 2 décompositions soit en un seul facteur 15, soit en deux facteurs 3×5.

On sait que n est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et par 3. Donc n admet 2 facteurs premiers. Comme 15 ne peut se décomposer en plus de 2 facteurs, alors n ne peut admettre que 2 facteurs premiers 2 et 3. On a donc :

$$n = 2^\alpha \times 3^\beta.$$

Comme $15 = 3 \times 5$, on a alors : $(1+\alpha)(1+\beta) = 3 \times 5$.

On trouve alors deux solutions : $\alpha = 2$ et $\beta = 4$ ou $\alpha = 4$ et $\beta = 2$.

On sait de plus que n n'est pas divisible par $8 = 2^3$, donc α est inférieur à 3.

Le nombre n cherché est donc :

$$n = 2^2 3^4 = 4 \times 81 = 324.$$

Exercice 16 : Déterminer le plus petit entier naturel possédant 28 diviseurs.

Correction : Posons n l'entier cherché.

On cherche d'abord toutes les décompositions de 28 en facteurs supérieurs à 1. On peut décomposer 28 en 1, 2 ou 3 facteurs :

$$28 \quad \text{ou} \quad 2 \times 14 \quad \text{ou} \quad 4 \times 7 \quad \text{ou} \quad 2 \times 2 \times 7.$$

1. En 1 facteur :

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 28$ soit $\alpha = 27$.

   D'où, $n = 2^{27} = 134217728$.

2. En deux facteurs : $28 = 2 \times 14$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 14$ et $\beta + 1 = 2$. [1]

   On a donc $\alpha = 13$ et $\beta = 1$.

   D'où, $n = 2^{13} \times 3 = 24576$.

3. En deux facteurs : $28 = 4 \times 7$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $\alpha + 1 = 7$ et $\beta + 1 = 4$.

   On trouve alors $\alpha = 6$ et $\beta = 3$.

   D'où, $n = 2^6 \times 3^3 = 1728$.

4. En trois facteurs : $28 = 2 \times 2 \times 7$.

   Le plus petit entier n est alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ avec $\alpha + 1 = 7$, $\beta + 1 = 2$ et $\gamma + 1 = 2$.

   On trouve alors $\alpha = 6$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

   D'où $n = 2^6 \times 3 \times 5 = 960$.

Le plus petit entier naturel ayant 28 diviseurs est donc 960.

Un peu d'histoire : *Un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres est parfait. Un diviseur propre est un diviseur autre que le nombre lui-même.*

Le premier nombre parfait est 6. *En effet* 1, 2 *et* 3 *sont les diviseurs propres de* 6 *et* $1+2+3=6$.

— 28 *est également un nombre parfait :* $1+2+4+7+14=28$.
— *Les nombres parfaits sont rares, il n'en existe que trois inférieurs à* 1000 *qui sont* 6 *,*28 *et* 496.

Ensuite vient 8 128 , puis 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128 (découvert par Leonhard Euler), 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176, ...

— *Actuellement,* 51 *nombres parfaits sont connus. Le plus grands possède 12 640 858 chiffres et est égal à :*

$$2^{20996010}\left(2^{20996011-1}\right).$$

Comme pour le plus grand nombre premier, c'est le projet GIMPS qui détient le record.

*Dans le IX*e *livre des Éléments, Euclide d'Alexandrie* $(-320?;-260$ *?) expose une façon de générer des nombres parfaits. C'est le propos de l'exercice suivant :*

Exercice 18 (Théorème d'Euclide) :

1. **(Exemples)** Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombre parfait :

« Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1}-1)$ et si $2^{n+1}-1$ est premier, alors a est parfait ».

Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits. (On ne demande pas de prouver la règle).

2. **(Démonstration)** On pose $a=2^n(2^{n+1}-1)$ et on suppose que $2^{n+1}-1$ est premier.

   a. Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?
   b. En déduire la liste des diviseurs de a.
   c. Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts de a est égale à ce nombre a.

Remarque : Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Exercice 19 : Déterminer le PGCD de 8870 et de 3120.

Exercice 20 : Déterminer, suivant les valeurs de $n \geq 3$ le PGCD de $5n-9$ et $2n-6$.

Correction : $5n-9=2\times(2n-6)+(n+3)$.

Donc,

$$(5n-9)\wedge(2n-6)=(2n-6)\wedge(n+3).$$

$(2n-6)=2\times(n+3)-12$.

Donc,

$$(2n-6)\wedge(n+3)=(n+3)\wedge 12$$

D'où,

$$(5n-9)\wedge(2n-6)=(n+3)\wedge 12.$$

Exercice 22 : Calculer $(15a+4b)\wedge(11a+3b)$ en fonction de $a\wedge b$.

Correction : $(15a+4b)=1\times(11a+3b)+(4a+b)$.

Donc,

$$(15a+4b)\wedge(11a+3b)=(11a+3b)\wedge(4a+b)$$

$(11a+3b)=2\times(4a+b)+(3a+b)$.

Donc,

$$(11a+3b)\wedge(4a+b)=(4a+b)\wedge(3a+b)$$

$(4a+b)=1\times(3a+b)+a$. Donc

$$(4a+b)\wedge(3a+b)=(3a+b)\wedge a.$$

$(3a+b)=3\times a+b$. Donc

$$(3a+b)\wedge a=a\wedge b.$$

D'où,

$$(15a+4b)\wedge(11a+3b)=a\wedge b.$$

⌊1⌋. Le second cas avec $\alpha+1=2$ et $\beta+1=14$ donne un entier clairement plus grand d'après la stricte croissance des fonctions puissances $x\longmapsto x^\gamma$.

Exercice 24 : Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a \leq b$ vérifiant :

$$a + b = 256 \text{ et } a \wedge b = 16.$$

Correction : Comme $a \wedge b = 16$, on peut écrire : $\begin{cases} a = 16\alpha \\ b = 16\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

$a + b = 256 \iff 16(\alpha + \beta) = 256 \iff \alpha + \beta = 16$.

Par élimination, les couples (α, β) sont $(1, 15), (3, 13), (5, 11), (7, 9)$.

Les solutions sont donc

$$(16, 240), (48, 208), (80, 176), \text{ et } (112, 144).$$

Exercice 26 : Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $x + y = 84$ et $(x \wedge y)^2 = (x \vee y)$.

Correction : Soit $d = x \wedge y$. On peut écrire $\begin{cases} a = d\alpha \\ b = d\beta \end{cases}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

On a

— $d^2 = \dfrac{xy}{d}$ *i.e.* $d^2 = \dfrac{d^2\alpha\beta}{d}$ *i.e.* $d = \alpha\beta$.
— $d(\alpha + \beta) = 84$ donc $d|84$ *i.e.* $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

On a donc $\begin{cases} \alpha\beta = d \\ \alpha + \beta = \dfrac{84}{d} \end{cases}$. α et β sont donc racines de $X^2 - \dfrac{84}{d}X + d$.

Le discriminant $X^2 - \dfrac{84}{d}X + d$ est $\Delta = \left(\dfrac{84}{d}\right)^2 - 4d = \dfrac{84^2 - 4d^3}{d^2}$. Il est nécessairement positif *i.e.* $0 \leq d \leq \sqrt[3]{42^2} \simeq 12,1$.

Remarque : On n'est pas assuré que $\dfrac{84}{d}$ soit pair donc on ne peut prendre le discriminant réduit pour ceux qui seraient tentés.

d	1	2	3	4	6	7	12
$\dfrac{84}{d}$	84	42	28	21	14	12	7
$\dfrac{84^2 - 4d^3}{d^2}$	7052	1756	772	$\notin \mathbb{N}$	172	116	1
$\sqrt{\Delta}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}$	1

La seule possibilité pour avoir $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ est donc $d = 12$ qui donne les solutions $\dfrac{\frac{84}{d} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2}$.

En conclusion $\{\alpha, \beta\} = \{3, 4\}$:

Les solutions sont donc $(36, 48)$ et $(48, 36)$.

Exercice 28 :

1. Calculer $598 \wedge 84$.
2. Réduire la fraction $\dfrac{1764}{945}$.
3. Calculer $186 \vee 33$ et $280 \vee 100$.

Correction :

1. $598 \wedge 84 = 2$.
2. $1764 \wedge 945 = 63$.

   Donc $\dfrac{1764}{945} = \dfrac{63 \times 28}{63 \times 15} = \dfrac{28}{15}$.

3 $186 \wedge 33 = 3$ donc $186 \vee 33 = \dfrac{186 \times 33}{3} = 2046$.

$280 \wedge 100 = 20$ donc $280 \vee 100 = \dfrac{280 \times 100}{20} = 1400$.

Exercice 30 : Déterminer deux entiers naturels a et b connaissant leur produit 1512 et leur ppcm 252.

Correction : Posons $d = a \wedge b$.

D'après (**??**), $252 \times d = ab$. Donc $d = 6$.

Posons $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

On a alors $35a'b' = 1512$ d'où $a'b' = 42$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, le couple (a', b') ne peut être égal qu'à :

$$(1; 42),\ (2; 21),\ (3.14),\ (6.7),\ (7; 6),\ (14, 3),\ (21; 2),\ \text{ou } (42; 1).$$

On multiplie par 6 pour avoir tous les couples solutions.

Exercice 32 : Soient d et m, respectivement le pgcd et le ppcm de deux naturels a et b.

Déterminer a et b tels que $m - 2d = 11$.

Correction : Posons toujours $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

Comme $md = ab$, on a $md = d^2a'b'$ puis $m = da'b'$.

La relation donnée s'écrit ainsi $da'b' - 2d = 11$.

$$d(a'b' - 2) = 11$$

D'où d, positif, divise 11. Il ne peut être égal qu'à 11 ou 1.

— Si $d = 11$, alors $a'b' - 2 = 1$ et $a'b' = 3$. Donc $(a', b') = (1, 3)$ ou $(3, 1)$ et $(a, b) = (11, 33)$ ou $(33, 11)$.
— Si $d = 1$, alors $a'b' = 13$ et $(a', b') = (1, 13)$ ou $(13, 1)$. Alors $(a, b) = (13, 1)$ ou $(1, 13)$.

On trouve donc 4 couples solutions.

Index

Algorithme
    d'Euclide, 9
Arithmétique, 1

Crible d'Ératosthène, 6

Dividende, 4
Diviseur, 2, 4
    du pgcd, 10
Divisibilité
    critère, 5
Division
    euclidienne, 7, 8
        de deux entiers naturels, 4
Décomposition
    primaire, 7

Ératosthène, 6

Gauss, 1

Méthode
    Égalité de deux nombres, 9
    Problèmes de divisibilité, 3
    Trouver un ppcm, 11
Multiple, 2, 11

Nombre
    impair, 3
    pair, 2
    parfait, 2
    premier, 1, 4, 5

Ordre
    total, 2

PGCD, 8, 10
    Définition, 8
    propriétés algébriques, 8
PPCM, 11
    définition, 10
    propriétés algébriques, 11
Premier
    nombre, 6

Quotient, 4

Relation
    d'ordre, 2
Reste, 4

Théorème
    fondamental
        de l'arithmétique, 7

Valuation
    d'un nombre premier, 7