

Fiche I – Calcul Littéral

I UN PEU DE CALCUL NUMÉRIQUE, C'EST TOUJOURS BON À PRENDRE

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1 $\frac{280}{49}$

2 $\frac{5}{12} - \frac{1}{15}$

3 $\frac{3}{14} - \frac{1}{21}$

4 $\frac{6}{35}$

5 $\frac{6}{35}$

6 $\left(\frac{7}{5} - \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{21}{15} - 1 + \frac{2}{3}\right)$

7 $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}}$

Simplifier au maximum les expressions suivantes (on écrira les résultats sans racine carrée au dénominateur) :

1 $\frac{12^5}{3^{42} 11}$

2 $\frac{15^2 \times 5^{-2} \times 7^3 \times 6 \times 2^{-5}}{10^2 \times 21 \times 5^{-3} \times (3^{-2})^3}$

3 $(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$

4 $\sqrt{6} \times \sqrt{14} \times \sqrt{7}$

5 $\sqrt{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{\frac{20}{18}} - \sqrt{\frac{45}{32}}$

6 $\frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3 \times \frac{3^n - 1}{2}$

7 $\frac{3}{\sqrt{3} - 2}$

II LE CALCUL LITTÉRAL EN MATHÉMATIQUES

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

1 $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

2 $(x - 1)^3 (x^2 + x + 1)$

6 $(2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1)$

7 $\left((x + 1)^2 (x - 1) (x^2 - x + 1) + 1\right) x - x^6 - x^5 + 2$

8 $(x + 1) (x - 1)^2 - 2(x^2 + x + 1)$

9 $(x^2 + \sqrt{2}x + 1) (1 - \sqrt{2}x + x^2)$

10 $(x^2 + x + 1)^2$

3 $(x + 1)^2 (x - 1) (x^2 - x + 1)$

4 $(x - 1)^2 (x + 1) (x^2 + x + 1)$

5 $(x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1)$

Factoriser les expressions polynomiales suivantes :

1 $-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$

2 $25 - (10x + 3)^2$

3 $(6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$

4 $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

5 $x^2 - 2x + 1$

6 $x^2 + 4x + 4$

7 $x^2 + 3x + 2$

8 $3x^2 + 7x + 1$

9 $2x^2 + 3x - 28$

10 $-5x^2 + 6x - 1$

11 $(x + y)^2 - z^2$

12 $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$

13 $xy + x + y + 1$

14 $xy - x - y + 1$

15 $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

16 $y^2 (a^2 + b^2) + 16x^4 (-a^2 - b^2)$

17 $x^4 - 1$

19 $x^4 + x^2 + 1$

18 $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$

20 $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

21 $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$

III ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

1 $x^2 - 6x + 9 = 0$

9 $3x^2 - 11x + 8 = 0$

2 $9x^2 + 6x + 1 = 0$

10 $5x^2 + 24x + 19 = 0$

3 $x^2 + 4x - 12 = 0$

11 $x^2 - 13x + 42 = 0$

4 $x^2 - 5x + 6 = 0$

12 $x^2 + 8x + 15 = 0$

5 $x^2 - 5x = 0$

13 $x^2 + 18x + 77 = 0$

6 $2x^2 + 3x = 0$

14 $x^2 - 8x - 33 = 0$

7 $2x^2 + 3 = 0$

15 $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

8 $x^2 + 4x - 5 = 0$

16 $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

17 $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$

18 $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$

19 $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$

20 $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$

21 $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$

22 $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

1 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$

2 $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$

3 $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

1 $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

2 $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

3 $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

4 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

5 $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

IV DÉRIVATION

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

- | | |
|---|--|
| 1 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. | 13 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$. |
| 2 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. | 14 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$. |
| 3 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$. | 15 $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. |
| 4 $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$. | 16 $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$. |
| 5 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. | 17 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$. |
| 6 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. | 18 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$. |
| 7 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$. | 19 $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$. |
| 8 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$. | 20 $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. |
| 9 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. | 21 $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. |
| 10 $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. | |
| 11 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$. | |
| 12 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$. | |

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

- | |
|---|
| 1 $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{2 + x}$. |
| 2 $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x + 1)$. |
| 3 $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x + 2}{x - 1}$. |
| 4 $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x + 1} + x - 2 \ln(x + 1)$. |
| 5 $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$. |

V PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 $\frac{1}{t + 1}$ | 3 $\frac{3}{(t + 2)^3}$ |
| 2 $\frac{3}{(t + 2)^2}$ | 4 $\sin(4t)$ |

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | |
|---|---|
| 1 $\cos^2 t \sin t$ | 6 $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t \cos t}$ |
| 2 $\cos(t) e^{\sin t}$ | 7 $\frac{1}{(1 - \sin t)^3}$ |
| 3 $\tan t$ | 8 $\frac{1}{1 + 4t^2}$ |
| 4 $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ | 9 $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ |
| 5 $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ | |

On rappelle que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\boxed{1} \int_{-1}^3 2 dx$$

$$\boxed{2} \int_1^3 2x - 5 dx$$

$$\boxed{3} \int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$$

$$\boxed{4} \int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$$

$$\boxed{5} \int_0^1 x^5 - x^4 dx$$

$$\boxed{6} \int_1^{-1} x^{100} dx$$

$$\boxed{7} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$$

$$\boxed{8} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$$

$$\boxed{9} \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$\boxed{10} \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\boxed{11} \int_{-3}^2 e^x dx$$

$$\boxed{12} \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{13} \int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$$

$$\boxed{14} \int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$\boxed{15} \int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$$

$$\boxed{16} \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$$

$$\boxed{17} \int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\boxed{18} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$$

$$\boxed{19} \int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$$

$$\boxed{20} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$$

$$\boxed{21} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$$

$$\boxed{22} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$$

$$\boxed{23} \int_0^1 x e^{x^2-1} dx$$

$$\boxed{24} \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$$