Fiche I – Calcul Littéral

I Un peu de calcul numérique, c'est toujours bon à prendre

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $\dfrac{280}{49}$

   Correction : $\dfrac{40}{7}$

2. $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{15}$

   Correction : $\dfrac{7}{20}$

3. $\dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{21}$

   Correction : $\dfrac{1}{6}$

4. $\dfrac{\frac{6}{35}}{3}$

   Correction : $\dfrac{2}{35}$

5. $\dfrac{6}{\frac{35}{3}}$

   Correction : $\dfrac{18}{35}$

6. $\left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{4}\right) - \left(\dfrac{21}{15} - 1 + \dfrac{2}{3}\right)$

   Correction : $-\dfrac{1}{6}$

7. $\dfrac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}}$

   Correction : $-\dfrac{12}{13}$

Simplifier au maximum les expressions suivantes (on écrira les résultats sans racine carrée au dénominateur) :

1. $\dfrac{12^5}{3^4 2^{11}}$

   Correction : $\dfrac{3}{2}$

2. $\dfrac{15^2 \times 5^{-2} \times 7^3 \times 6 \times 2^{-5}}{10^2 \times 21 \times 5^{-3} \times (3^{-2})^3}$

   Correction : $\dfrac{3^8 \times 5 \times 7^2}{2^6}$

3. $(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$

   Correction : -2

4. $\sqrt{6} \times \sqrt{14} \times \sqrt{7}$

   Correction : $14\sqrt{3}$

5. $\sqrt{\dfrac{5}{2}} + 3\sqrt{\dfrac{20}{18}} - \sqrt{\dfrac{45}{32}}$

   Correction : $\dfrac{9\sqrt{10}}{8}$

6. $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} + 3 \times \dfrac{3^n - 1}{2}$

   Correction : $3^{n+1} - 2$

7. $\dfrac{3}{\sqrt{3} - 2}$

   Correction : $-3(\sqrt{3} + 2)$

II Le calcul littéral en mathématiques

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

1. $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$

   Correction : $8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}$

   Correction : On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. $(x-1)^3 (x^2 + x + 1)$

   Correction : $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

Correction : On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-$
Pour être ``efficace'', il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p)=abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times 1+3\times 1+(-1)\times 1=-1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3. $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$

Correction : $x^5-x^3+x^2-1$

Correction : Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1)=x^2-1$ et $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)=\left[(x+1)(x-1)\right]\left[(x+1)\left(x^2-x+1\right)\right]=\left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right)=x^5-x^3+x^2-1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

4. $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$

Correction : $x^5-x^3-x^2+1$

Correction : On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)=x^5-x^3-x^2+1$.

5. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

Correction : x^4+x^2+1

6. $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$

Correction : $-28+21x$

7. $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$

Correction : $2+x^3-x^4-x^5$

8. $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$

Correction : $-1-3x-3x^2+x^3$

9. $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

Correction : $1+x^4$

10. $\left(x^2+x+1\right)^2$

Correction : $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

Factoriser les expressions polynomiales suivantes :

1. $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$

Correction : $-6(6x+7)$

Correction : Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49=-(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2=(6x+7)\left[-(6x-1)+6x-7\right]=-6(6x+7)$$

.

2. $25-(10x+3)^2$

Correction : $4(5x+4)(-5x+1)$

Correction : On calcule $25-(10x+3)^2=5^2-(10x+3)^2=(10x+8)(-10x+2)=4(5x+4)(-5x+1)$.

3. $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$

Correction : $2(3x-4)(10x+3)$

4. $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$

Correction : $-8(x+1)(x+16)$

5. x^2-2x+1

Correction : $(x-1)^2$

6 x^2+4x+4

Correction : $(x+2)^2$

7 x^2+3x+2

Correction : $(x+1)(x+2)$

Correction : *La forme canonique est* $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. *On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable* $a^2-b^2=\ldots$

8 $3x^2+7x+1$

Correction : $3\left(x+\frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$

Correction : *La forme canonique est* $3\left[\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right]$.

9 $2x^2+3x-28$

Correction : $2\left(x+\frac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$

Correction : *La forme canonique est* $2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{233}{16}\right]$.

10 $-5x^2+6x-1$

Correction : $-5\,(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)$

Correction : *La forme canonique est* $-5\left[\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right]$.

11 $(x+y)^2-z^2$

Correction : $(x+y-z)(x+y+z)$

12 $x^2+6xy+9y^2-169x^2$

Correction : $3(14x+3y)(-4x+y)$

Correction : *On calcule* $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(x+3y)^2-(13x)^2=(14x+3y)(-12x+3y)$
$=3(14x+3y)(-4x+y)$.

13 $xy+x+y+1$

Correction : $(x+1)(y+1)$

14 $xy-x-y+1$

Correction : $(x-1)(y-1)$

15 $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$

Correction : $(x+y)(x+1)^2$

Correction : *On calcule* $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y=(x+y)(x^2+2x+1)=(x+y)(x+1)^2$.

16 $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$

Correction : $\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$

17 x^4-1

Correction : $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

Correction : *On calcule* $x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

18 $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$

Correction : $-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$

Correction : *On calcule* $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64=-8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right]$
$=-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

19 x^4+x^2+1

Correction : $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

Correction : On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)-x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

20 $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

Correction : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

Correction : Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)\,.$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

21 $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$

Correction : $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$

III ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

1 $x^2-6x+9=0$

Correction : $3, 3$

Correction : C'est une identité remarquable : $x^2-6x+9=(x-3)^2$.

2 $9x^2+6x+1=0$

Correction : $-1/3, -1/3$

3 $x^2+4x-12=0$

Correction : $2, -6$

Correction : Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

4 $x^2-5x+6=0$

Correction : $2, 3$

5 $x^2-5x=0$

Correction : 0, donc 5

Correction : La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6 $2x^2+3x=0$

Correction : 0, donc $-3/2$

7 $2x^2+3=0$

Correction : $\emptyset$

Correction : La fonction $x \longmapsto 2x^2+3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

8 $x^2+4x-5=0$

Correction : 1 donc -5

9 $3x^2-11x+8=0$

Correction : 1 donc $8/3$

10 $5x^2+24x+19=0$

Correction : -1 donc $-19/5$

11 $x^2 - 13x + 42 = 0$

Correction : $6, 7$

Correction : Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

12 $x^2 + 8x + 15 = 0$

Correction : $-3, -5$

Correction : On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

13 $x^2 + 18x + 77 = 0$

Correction : $-7, -11$

14 $x^2 - 8x - 33 = 0$

Correction : $-3, 11$

15 $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Correction : a, b

16 $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Correction : $a - b, a + b$

17 $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$

Correction : 1 donc $(a - b)/(b - c)$

18 $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$

Correction : 1 donc $c(a - b)/(a(b - c))$

19 $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$

Correction : m donc $-(m + a + b)$

20 $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$

Correction : m donc $m(a - b)/(b - c)$

21 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{b}{x} = \dfrac{m}{a} + \dfrac{b}{m}$

Correction : m donc ab/m

Correction : En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'équation devient $m(x^2+ab) = x(m^2+ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

22 $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Correction : $a + b$ puis $2ab/(a + b)$.

Correction : Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a+b$ convient. L'équation se réécrit $(a + b)(x - a)(x - b) = ab(2x - (a + b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

1 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$

Correction : $m = -3/4$ et $x = 3/4$

Correction : Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.
Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-3)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

2. $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$

Correction : $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$
Correction : Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

3. $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$

Correction : $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$
Correction : Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2-1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

1. $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$

Correction : $a = 2$ et $b = 3$

2. $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$

Correction : $a = -2$ et $b = 1$

3. $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$

Correction : $a = -3$ et $b = 5$

4. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$

Correction : $a = 1/2$ et $b = 8$

5. $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax+b)$

Correction : $a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$

IV DÉRIVATION

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

1. $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$.

Correction : $6x^2 + 2x - 11$
Correction : On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2+3x+2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

2. $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$.

Correction : $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$
Correction : On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5) + (x^3+3x+2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

3. $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$.

Correction : $(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$
Correction : On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x) + (x^2-2x+6) \times 2\exp(2x) = (2x^2-2x+10)\exp(2x)$.

4. $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x-2)$

Correction : $(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2) + (3x^2-x) \times \dfrac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

5 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$.

Correction : $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

Correction : On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

6 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$.

Correction : $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

Correction : On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

7 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$.

Correction : $8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4$

Correction : On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

8 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$.

Correction : $-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$

Correction : On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos($
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

9 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Correction : $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

10 $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Correction : $\dfrac{1}{x\ln(x)}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

11 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$.

Correction : $(-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x)$

Correction : On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

12 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$.

Correction : $6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$

Correction : On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

13 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$.

Correction : $\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

Correction : On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \times \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)\frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + 1)^2}\cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

14 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$.

Correction : $\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$

Correction : On calcule :

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2(x^2+4)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2}$$
$$= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right).$$

15 $x \in \,]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$.

Correction : $\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

16 $x \in \,]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$.

Correction : $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

17 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$.

Correction : $\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

18 $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$.

Correction : $-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\,\mathrm{c}}{(x^2+1)^2}$

19 $x \in \,]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$.

Correction : $\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x)-(2x^2+3x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$

20 $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Correction : $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Correction : On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

21 $x \in \,]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Correction : $\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x-\sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$.

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

1 $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$.

Correction : $\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2-(3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

2 $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

Correction : $\dfrac{2}{x+1}\Big(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\Big)$

Correction : On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\Big(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\Big)$.

3 $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$.

Correction : $\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$

Correction : On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

4 $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$.

Correction : $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

Correction : On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

5 $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

Correction : $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$

V Primitives et intégrales

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

1 $\dfrac{1}{t+1}$

Correction : $\ln|t+1|$

Correction : Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

2 $\dfrac{3}{(t+2)^2}$

Correction : $-\dfrac{3}{t+2}$

Correction : Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

3 $\dfrac{3}{(t+2)^3}$

Correction : $-\dfrac{3}{2(t+2)^2}$

Correction : Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

4 $\sin(4t)$

Correction : $-\dfrac{\cos(4t)}{4}$

Correction : Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

1 $\cos^2 t \sin t$

Correction : $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

2 $\cos(t)\,\mathrm{e}^{\sin t}$

Correction : $\mathrm{e}^{\sin t}$

3 $\tan t$

Correction : $-\ln|\cos t|$

4 $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$

Correction : $-\ln|1-\sin t|$

5 $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

Correction : $-2\cos\sqrt{t}$

6 $\dfrac{\cos(\pi\ln t)}{t}$

Correction : $\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$

7 $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$

Correction : $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$

8 $\dfrac{1}{1+4t^2}$

Correction : $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)$

9 $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$

Correction : $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$

On rappelle que si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Calculer les intégrales suivantes.

1 $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$

Correction : 8

Correction : *Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.*

2 $\displaystyle\int_1^3 2x - 5 \,\mathrm{d}x$

Correction : -2

Correction : $\displaystyle\int_1^3 2x - 5 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - 5x\right]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

3 $\displaystyle\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$

Correction : $\dfrac{8}{3}$

Correction : $\displaystyle\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

4 $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$

Correction : 0

Correction : *La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.*

5 $\displaystyle\int_0^1 x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$

Correction : $-\dfrac{1}{30}$

Correction : $\displaystyle\int_0^1 x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

6 $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$

Correction : $-\dfrac{2}{101}$

Correction : $\displaystyle\int_1^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

7 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$

Correction : 0

Correction : *La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.*

8 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$

Correction : 1

Correction : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x = \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

9 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Correction : $\dfrac{1}{2}$

Correction : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

10 $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

Correction : 18

Correction : $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{100} = 18.$

11 $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Correction : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}$

Correction : $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

12 $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Correction : $-\ln 3$

Correction : $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

13 $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3\,\mathrm{d}x$

Correction : 78

Correction : $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

14 $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x$

Correction : $2(\mathrm{e}^3 - 1)$

Correction : $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\right]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

15 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2}$

Correction : $\displaystyle\frac{1}{\pi}\ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

Correction : $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$

16 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$

Correction : $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{6}$

Correction : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

17 $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$

Correction : 6

Correction : $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

18 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\mathrm{d}x$

Correction : $\displaystyle\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Correction : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

19 $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x$

Correction : 0

Correction : $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5)\right]_1^3 = 0.$

20 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

Correction : 0

Correction : La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

21 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x$

Correction : $\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Correction : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

22 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x$

Correction : $-\dfrac{1}{384}$

Correction : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

23 $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Correction : $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

Correction : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

24 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$

Correction : $\dfrac{7}{48}$

Correction : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$