Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique

Définition 1 (Divisibilité dans $\mathbb{N}$) : Soient a et b des entiers naturels.

On dit que a *divise* b, noté $a|b$, ...

On dit alors que :

- a est .... de b. On note ...... leur ensemble.

Proposition 1 (Compatibilité) :

$\boxed{1}$ $\begin{array}{l}\forall a,b,c \in \mathbb{N} \\ \forall m,n \in \mathbb{N}\end{array}$, $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Longrightarrow a|.........$ (« $a|b$ » ....)

Proposition 2 : Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul.

$b|a \iff$ ....

Théorème 3 (Critère d'arrêt) :

- Tout entier naturel n, $n \geqslant 2$, ...
- Si n n'est pas premier, alors ....

....

Théorème 4 : L'ensemble des nombres premiers est ....

Preuve : Supposons .... i.e. qu'il existe un nombre .... de nombres premiers que l'on va noter p_1, p_2, ..., P_n et posons

....

L'objectif de la cette démonstration est de prouver que N est .... Comme il est strictement .... , on aura notre contradiction.

Si N est .... , la contradiction est déjà toute trouvée. Sinon, d'après le critère d'arrêt, N admet .... Soit p_i ce .... premier.

Par définition p_i .... $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ et ...... donc .... aussi ....

Ceci est impossible, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre .... de nombres premiers est absurde.

Corollaire 4.1 : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ admet .... diviseurs.

En particulier, $60 =$ .... admet .... diviseurs.

Théorème 5 : Soient a et b deux entiers non nuls.

- Les multiples communs de a et b sont .... de ppcm $(a\,;b)$:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \iff \begin{cases} a|m \\ b|m \end{cases}$$

De manière équivalente : $(a \vee b)\mathbb{Z} = \ldots\ldots\ldots.$

Proposition 6 : Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et $b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\beta_p}$.

Alors,

$$a \wedge b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Exercice 1 : Calculer :

1. pgcd $(36\,;24) =$ ....
2. pgcd $(231\,;299) =$ ....
....
....
....
....
....
....

Nom : .... **Prénom :** ....

Arithmétique

Définition 2 (Divisibilité dans $\mathbb{N}$) : Soient a et b des entiers naturels.

On dit que a *divise* b, noté $a|b$, ...

On dit alors que :

- b est .... de a. On note ..... leur ensemble.

Proposition 7 (Compatibilité) :

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \implies a|\ .$ $\Big($ « $a|b$ » .... $\Big)$

Proposition 8 : Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul.

$b|a \iff$ ....

Théorème 9 (Théorème fondamental de l'arithmétique) : Tout entier n supérieur à 2 admet .... (à l'ordre des facteurs près) ....

$n =$ ...., avec $p_i \in \mathbb{P}$ deux à deux distincts et $\alpha_i \in$ ... .

Preuve : Pour tout entier $n \geqslant 2$, posons :

$\mathrm{H}(n)$: « L'entier n peut s'écrire sous la forme .... »

On va démontrer cette propriété par ....

Comme 2 est ...., il peut s'écrire comme le produit de lui-même et $\mathrm{H}(2)$ est vérifiée.

Supposons alors que $\mathrm{H}(k)$ soit vérifiée pour tout entier .... et considérons l'entier $n+1$:

- Si $n+1$ est ...., alors ....
- Si $n+1$ n'est .... alors il admet un .... p et on a $n = p \times m$ où m est un entier tel que $2 \leqslant m \leqslant n$.

  Il suffit alors d'appliquer .... à ...... pour avoir l'existence de la décomposition et la propriété $\mathrm{H}(n+1)$.

  En conclusion, la propriété $\mathrm{H}(n)$ est donc ....

Étant .... , ...

Corollaire 9.1 : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ admet .... diviseurs.

En particulier, $450 =$ .... admet ..... diviseurs.

Théorème 10 : Soient a et b deux entiers non nuls.

- Les diviseurs communs de a et b sont .... de pgcd $(a\,;b)$:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \iff \begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$$

De manière équivalente : $\mathscr{D}(a \wedge b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Proposition 11 : Soient a et b deux entiers supérieurs à 2 dont les décompositions primaires s'écrivent $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p}$ et $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p}$.

Alors,

$$a \vee b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 1 : Calculer :

1. pgcd $(15\,;45) =$ ....
2. pgcd $(201\,;289) =$ ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....