

Ensembles et Arithmétique

Exercice 1 : Soit un ensemble E et deux parties A et B de E .

On désigne par $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- 1 Démontrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- 2 Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
- 3 Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E ,

$$A\Delta X = X\Delta A = A.$$

- 4 Démontrer que pour toute partie A de E , il existe une partie A' de E et une seule telle que

$$A\Delta A' = A'\Delta A = X.$$

Exercice 2 :

Partie I : Théorème de Bézout

Dans toute cette partie, on considère deux entiers non nuls a et b et on pose \mathcal{G} , l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma + nb$ où m et n sont des entiers relatifs :

$$\mathcal{G} = \{ma + nb, ((m; n) \in \mathbb{Z}^2) \wedge (ma + nb > 0)\}.$$

On rappelle que toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

- 1 Montrer que \mathcal{G} admet un plus petit élément $d \in \mathbb{N}$.
- 2
 - a Montrer que $\text{pgcd}(a; b) \mid d$.
 - b Montrer que $d \mid a$ et $d \mid b$. Que peut-on en déduire ?
- 3 En déduire qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $au + bv = \text{pgcd}(a; b)$.
- 4 Démontrer le théorème de Bézout :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si il existe deux entiers (relatifs) u et v tels que $au + bv = 1$.

- 5 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que 27 et 59 sont premiers entre eux et déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers tel que :

$$27u + 59v = 1.$$

Un peu d'histoire : *Étienne Bézout (1730-1783 à 53 ans), est un mathématicien français. Il est passé à la postérité pour le théorème de Bachet-Bézout en arithmétique et pour son théorème sur le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques, résultat crucial en géométrie algébrique.*

Partie II : Applications

1 **Le théorème de Gauss :** Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

À l'aide du théorème de Bézout, montrer que si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c .

2 **Une équation diophantienne :**

On considère l'équation :

$$59x + 27y = 3. \quad (\text{E})$$

On souhaite résoudre cette équation dans \mathbb{Z}^2 c'est-à-dire que l'on cherche tous les couples $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E).

(a) À l'aide du théorème de Bézout, trouver un couple $(x_0; y_0)$ d'entiers solution de (E).

(b) À l'aide du théorème de Gauss, en déduire que les couples $(x; y)$ solutions de (E) vérifient :

$$59(x - 33) + 27(y + 72) = 0.$$

(c) Résoudre (E).

Un peu d'histoire : Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.

Index

- Algorithme
 - d'Euclide, 17, 21
- Anneau
 - principal, 15
- Arbre pondéré, 14
- Arithmétique, 1
- Borne
 - inférieure, 16
 - supérieure, 20
- Crible d'Ératosthène, 8
- Dividende, 5
- Diviseur, 2, 5, 13
 - du pgcd, 18
 - Ensemble des, 15
- Divisibilité, 16
 - critère, 8
- Division
 - euclidienne, 12, 16
 - de deux entiers naturels, 5
- Décomposition
 - primaire, 11
- Ératosthène, 8
- Fermat, 14
- Gauss, 1
- Idéal, 15
- Mersenne, 13
- Méthode
 - Égalité de deux nombres, 16
 - Problèmes de divisibilité, 4
 - Trouver un ppcm, 22
- Multiple, 2, 9, 20
- Nombre
 - de Fermat, 14
 - de Mersenne, 13
 - impair, 4
 - pair, 2
 - parfait, 2
 - premier, 1, 7, 8
- Ordre
 - total, 2
- Partie
 - entière, 6
- PGCD, 16, 18
 - Définition, 15
 - propriétés algébriques, 16
- PPCM, 20
 - définition, 20
 - propriétés algébriques, 20
- Premier
 - nombre, 9
- Quotient, 5
- Relation
 - d'ordre, 2, 16
- Reste, 5
- Théorème
 - fondamental
 - de l'arithmétique, 11
- Valuation
 - d'un nombre premier, 11