Ensembles et Arithmétique

Exercice 1 : Soit un ensemble E et deux parties A et B de E.

On désigne par $\mathrm{A}\triangle\mathrm{B}$ l'ensemble $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\backslash(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

1. Démontrer que $\mathrm{A}\triangle\mathrm{B} = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$.

2. Démontrer que pour toutes les parties $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ de E on a $(\mathrm{A}\triangle\mathrm{B})\triangle\mathrm{C} = \mathrm{A}\triangle(\mathrm{B}\triangle\mathrm{C})$.

3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E,
$$\mathrm{A}\triangle\mathrm{X} = \mathrm{X}\triangle\mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que
$$\mathrm{A}\triangle\mathrm{A}' = \mathrm{A}'\triangle\mathrm{A} = \mathrm{X}.$$

Exercice 2 :

Partie I : Théorème de Bézout

Dans toute cette partie, on considère deux entiers non nuls a et b et on pose $\mathcal{G}$, l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma + nb$ où m et n sont des entiers relatifs :
$$\mathcal{G} = \Big\{ma + nb,\ ((m\,;n)\in\mathbb{Z}^2)\wedge(ma+nb>0)\Big\}.$$
On rappelle que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ admet un plus petit élément $d \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrer que $\operatorname{pgcd}(a\,;b) \mid d$.
   (b) Montrer que $d \mid a$ et $d \mid b$. Que peut-on en déduire ?

3. En déduire qu'il existe un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que $au + bv = \operatorname{pgcd}(a\,;b)$.

4. Démontrer le théorème de Bézout :

   Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement si il existe deux entiers (relatifs) u et v tels que $au + bv = 1$.

5. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que 27 et 59 sont premiers entre eux et déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers tel que :
$$27u + 59v = 1.$$

Un peu d'histoire : ***Étienne Bézout*** *(1730-1783 à 53 ans), est un mathématicien français. Il est passé à la postérité pour le théorème de Bachet-Bézout en arithmétique et pour son théorème sur le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques, résultat crucial en géométrie algébrique.*

Partie II : Applications

1 **Le théorème de Gauss :** Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

À l'aide du théorème de Bézout, montrer que si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

2 **Une équation diophantienne :**

On considère l'équation :

$$59x + 27y = 3. \tag{E}$$

On souhaite résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$ c'est-à-dire que l'on cherche tous les couples $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E).

a) À l'aide du théorème de Bézout, trouver un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers solution de (E).

b) À l'aide du théorème de Gauss, en déduire que les couples $(x\,;y)$ solutions de (E) vérifient :

$$59(x - 33) + 27(y + 72) = 0.$$

c) Résoudre (E).

Un peu d'histoire : ***Johann Carl Friedrich Gauss*** *(1777-1855), est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens», il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.

Euclide

Index