Applications

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?) : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a < b$.
2. Si f est croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a) \leqslant f(b)$, alors $a \leqslant b$.
4. $[\forall u, v \in \mathbb{R}, (u < v \implies f(u) \leqslant f(v))] \iff [\forall u, v \in \mathbb{R}, (u \leqslant v \implies f(u) \leqslant f(v))]$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x < y < z$ tels que :

$$\Big\{f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\Big\} \text{ ou } \Big\{f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\Big\}.$$

Exercice 3 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1. f est majorée par M.
2. f est minorée.
3. f est bornée sur I.
4. f n'admet pas de minimum global.
5. f n'admet pas de minimum local.

Exercice 4 : Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

1. $\mathbb{R}_+$
2. $\mathbb{Z}$
3. $[0\,;1]$
4. $]0\,;1]$
5. $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 5 : Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & \{0,1\} \\ x & & \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que pour toutes partie A et B de E, on a :
   a. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.
   b. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
   c. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
   d. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
   e. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
2. En déduire que pour toutes parties A, B et C de E :
   a. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   b. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Exercice 6 :

1. Soient les fonctions définies par $f(x) = (1-x)^2$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Déterminer les fonctions $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$ ainsi que leur domaine de définition respectif.
2. Même question avec $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = |x|$.

Exercice 7 : Déterminer deux applications f et g telles que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 8 : Soient $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$.
Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$.

Exercice 9 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et A une partie de E.
Montrer que $(g \circ f)(\mathrm{A}) = g(f(\mathrm{A}))$.

Correction : $z \in g(f(\mathrm{A})) \iff \exists y \in f(\mathrm{A}),\, z = g(y) \iff \exists x \in \mathrm{A},\, z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$
$\iff z \in (g \circ f)(\mathrm{A})$.

Exercice 10 :

1. Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications et B une partie de G.
   Montrer que $(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$.
2. Montrer que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective si, et seulement si pour tout partie A de E on a :

$$f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}.$$

Correction : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{G}$ deux applications.

1. $x \in (g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) \iff g(f(x)) \in \mathrm{B} \iff f(x) \in g^{-1}(\mathrm{B})$
   $\iff x \in f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$.
2. Supposons f injective et considérons A une partie de E.
   On sait que $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$. Si $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$, alors $f(x) \in f(\mathrm{A})$, donc il existe $y \in \mathrm{A}$ tel que $f(x) = f(y)$.
   comme f est injective, on obtient alors $x = y$ et donc $x \in \mathrm{A}$. Donc $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$.

Réciproquement, si pour tout partie A de E on a $f^{-1}(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$.

En particulier, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $f^{-1}\Big(f(\{x\})\Big) = \{x\}$.

D'où, si $f(y) = f(x) \in f^{-1}\Big(f(\{x\})\Big)$ alors $y \in \{x\}$ i.e. $y = x$.

L'application f est donc injective.

Exercice 11 : Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \sqrt{x}$
2. $x \longmapsto \cos(x)$
3. $x \longmapsto |x+2| + |x-3|$
4. $x \longmapsto \ln(x)$
5. $x \longmapsto x^2 + 3x + 5$
6. $x \longmapsto |x+1|$

Exercice 12 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f_i suivantes définies par :

$f_1(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$f_2(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$f_4(x) = \ln(\ln(x))$

$f_5(x) = \dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$

$f_6(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$

$f_7(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$f_8(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x^2 - x - 10}$

$$f_9(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$f_{10}(x) = \sqrt{\frac{2-5x}{x^2-6x+5}}$$
$$f_{11}(x) = h(x) = \ln(2x+3).$$
$$f_{12}(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$
$$f_{13}(x) = \ln(x-2) - \ln(x-1)$$
$$f_{14}(x) = \ln(x-2) - \ln(1-x)$$
$$f_{15}(x) = \ln(\ln(x))$$
$$f_{16}(x) = \sqrt{\ln(x+3)}$$
$$f_{17}(x) = g(x) = \frac{1}{\cos(2x)}.$$

Exercice 13 : Étudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x(3x^2-1).$$
$$g(x) = \mathrm{e}^{|x|}.$$
$$h(x) = \ln(x^2+1).$$
$$i(x) = \frac{\cos(x)}{x^2-1}.$$
$$j(x) = x\sin(x)+1.$$
$$k(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}.$$
$$l(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
$$m(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

Exercice 14 :

1. Montrer que si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.
3. Montrer que si f est dérivable et T-périodique, alors f' est T-périodique.

Exercice 15 : Soit $f : x \longmapsto \ln\left|x^2-4x+3\right|$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, $f(2-x) = f(2+x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : *La droite (Δ) d'équation $x = 2$ est la médiatrice du segment $[\mathrm{MN}]$ où M, d'abscisse $a+x$ et N, d'abscisse $a-x$ sont des points de $\mathscr{C}_f$ i.e. l'axe de symétrie de la courbe.*

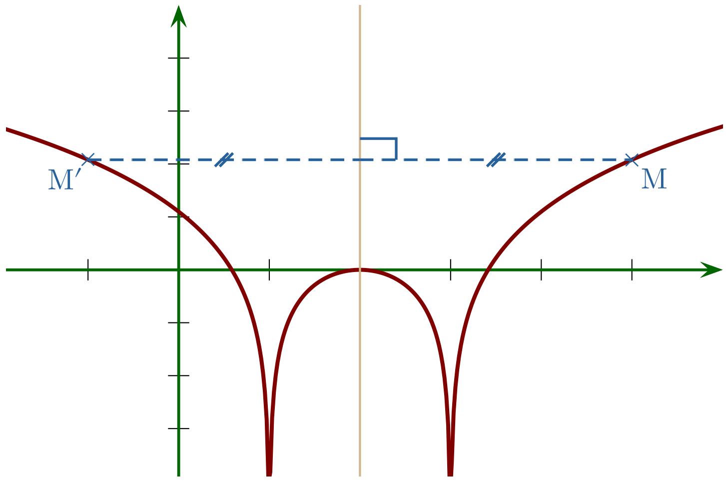

Figure III.1 – (Δ) : $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe de $x \longmapsto \ln\left|x^2-4x+3\right|$.

Exercice 16 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(1+x) + f(1-x) = -6$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction : *Le point $\mathrm{A}\,(1\,;-3)$ est donc le milieu du segment $[\mathrm{MN}]$ où M, d'abscisse $1+x$ et N, d'abscisse $1-x$ sont des points de $\mathscr{C}_f$ i.e. le centre de symétrie de la courbe.*

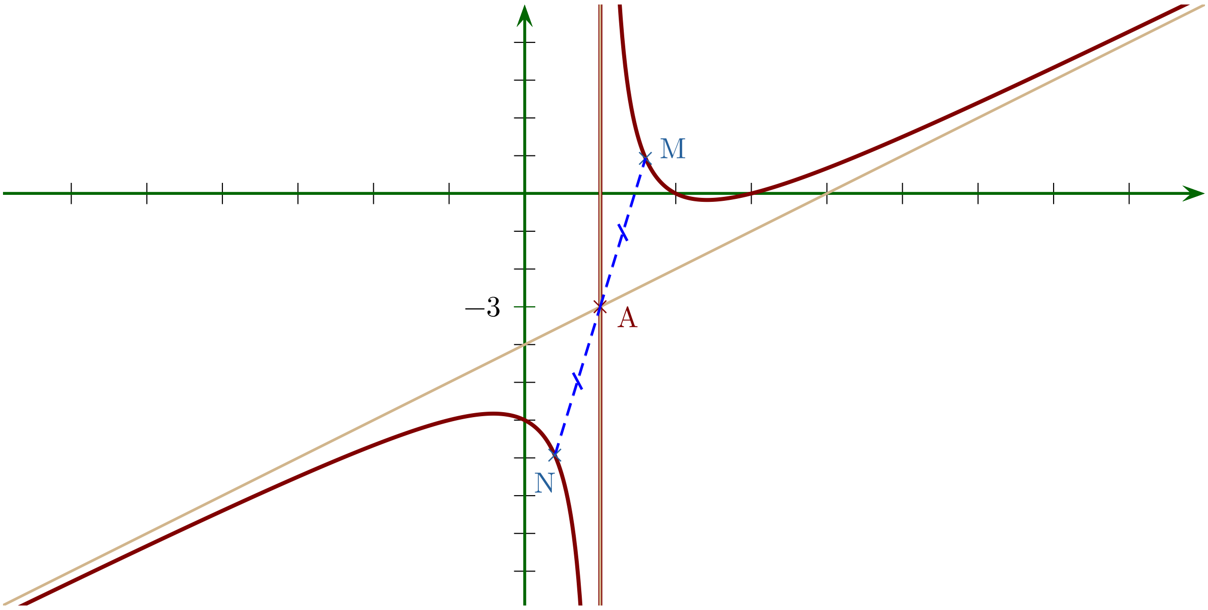

Figure III.2 – A $(1\,;-3)$ est centre de symétrie de la courbe de $x \longmapsto \dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$.

Méthode I (Axe et centre de symétrie) :

(Hors-Programme)

Soient a, b deux réels et f une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à a.

Pour montrer que la courbe de f admet :

- la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie, on montre que :
$$f(a-x) - f(a+x) = 0.$$
- le point $\Omega\,(a\,;b)$ comme centre de symétrie, on montre que :
$$f(a-x) + f(a+x) = 2b.$$

Exercice 17 : (Hors-Programme)

1. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un axe de symétrie.
2. Soit $g : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet un centre de symétrie.

Exercice 18 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

1. Montrer que I$(-1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. (Hors-Programme)
2. Étudier les variations de f.
3. Discuter graphiquement l'équation $f(x) = m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 19 : Donner la dérivée des fonctions définies par leur expression suivante :

(Il s'agit d'un exercice d'entraînement technique à la différentiation donc ne se préoccupera ici et exceptionnellement pas du domaine de dérivabilité)

$f_1(x) = (x-4)^2$.
$f_2(x) = \dfrac{1}{(5x-3)^3}$.
$f_3(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)$.
$f_4(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
$f_5(x) = \tan(3x)$.
$f_6(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos(x)}$.
$f_7(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.
$f_8(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
$f_9(x) = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$.
$f_{10}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
$f_{11}(x) = \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
$f_{12}(x) = \sqrt{x^2-x-2}$.
$f_{13}(x) = (x^2+2x-9)^3$.
$f_{14}(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$.
$f_{15}(x) = (4x^3+2x-1)^4$.
$f_{16}(x) = \sqrt{1-x^2}$.
$f_{17}(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3$.
$f_{18}(x) = \sqrt{\cos(x)}$.
$f_{19}(x) = \cos((x^2-5)^3)$.
$f_{20}(x) = \cos\left(\sqrt{2+\sin(x)}\right)$.
$f_{21}(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$.
$f_{22}(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$.
$f_{23}(x) = (1-5x^2)^3$.
$f_{24}(x) = \sin^2(x)$.
$f_{25}(x) = \sin(x^2)$.
$f_{26}(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.
$f_{27}(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$.
$f_{28}(x) = \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.
$f_{29}(x) = \mathrm{e}^{-x}+x^{-1}$.
$f_{30}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.
$f_{31}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x^2+5x-3}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.
$f_{32}(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$.
$f_{33}(x) = \mathrm{e}^{5x^3+7x+4}$.
$f_{34}(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.
$f_{35}(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$.
$f_{36}(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
$f_{37}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x+2}$.
$f_{38}(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}-3\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.
$f_{39}(x) = (x^2-4)\,\mathrm{e}^{x-2}$.
$f_{40}(x) = \mathrm{e}^{\frac{4}{2x-1}}$.
$f_{41}(x) = \dfrac{2\cos(x)+3}{2\cos(x)-3}$.
$f_{42}(x) = \sin(x)\,(1+\cos(x))$.
$f_{43}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
$f_{44}(x) = \dfrac{\cos(\pi x-1)}{\cos(x-\pi)}$.
$f_{45}(x) = (3x^2-2)\sin^2(x)$.
$f_{46}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
$f_{47}(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
$f_{48}(x) = \dfrac{\sin(5x)}{\sin(4x)}$.
$f_{49}(x) = \ln(\ln(x))$.
$f_{50}(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
$f_{51}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
$f_{52}(x) = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$.
$f_{53}(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
$f_{54}(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 20 (Important) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

Montrer que f est injective si, et seulement si il existe $h : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ telle que $h \circ f = id_{\mathrm{E}}$.

Correction : Si h existe alors, on sait que f est injective.

Réciproquement, supposons f est injective. Il nous faut construire la fonction h :

Soit $y \in \mathrm{F}$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f dans E si y a un antécédent (on sait alors qu'il est unique par injectivité de f) et si y n'a pas d'antécédent par f on choisit ce qu'on veut pour $h(y)$ dans E.

Chaque élément de F ayant une image unique, la fonction h est donc bien définie.

On vérifie alors que pour tout $x \in \mathrm{F}$, $h(f(x)) = x$ car x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f.

Exercice 21 (Important) : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

Montrer que f est surjective si, et seulement si il existe $h : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ telle que $f \circ h = id_{\mathrm{F}}$.

Correction : Si h existe alors on sait que f est surjective.

Réciproquement, si f est surjective, on construit h de même qu'à l' exercice (20) : soit $y \in \mathrm{F}$, on pose $h(y) = x$ avec x antécédent de y par f que l'on peut choisir car il en existe par la surjectivité de f.

On vérifie alors que pour tout $y \in \mathrm{F}$, $(f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x) = y$ car $h(y)$ est un antécédent de x par f.

Exercice 22 : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.
En considérant la partie $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.

Correction : Par l'absurde, supposons f est surjective i.e. il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f(x_0) = \mathrm{A}$.
x_0 ne peut appartenir qu'à A ou $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$:

- Si $x_0 \in \mathrm{A}$, alors $x_0 \in f(x_0)$ et donc $x_0 \notin \mathrm{A}$ (par définition de A), ce qui est absurde.
- Si $x_0 \notin \mathrm{A}$ alors $x_0 \notin f(x_0)$ et donc $x_0 \in \mathrm{A}$, ce qui est de nouveau absurde.

Par conséquent f ne peut pas être surjective.

Exercice 23 : Soient E, F et G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$, $g \in \mathcal{F}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ et on définit l'application $h \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\times\mathrm{G})$ par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ h(x) = (f(x)\,; g(x))\,.$$

1. Démontrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.
2. Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 24 (À retenir) : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ deux applications telles que :

$$f \circ g = id_{\mathrm{F}} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Correction : On sait que id_{F} et id_{E} sont injectives, on en déduit que g et f sont injectives.
On sait aussi que id_{F} et id_{E} sont surjectives, on en déduit que f et g sont surjectives.
Ce sont donc deux bijections, d'où $f = g^{-1} \circ id_{\mathrm{E}} = g^{-1}$.

Exercice 25 : Soient E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{E})$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 26 : Soit p un entier naturel supérieur à 2.

1. Montrer que la fonction : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & & x^p \end{array}$ est bijective.
2. En déduire que pour tout réel positif y, il existe un, et un seul réel positif x tel que $x^p = y$. Comment l'appelle-t-on et comment le note-ton ?
3. Montrer que dans le cas où $y > 0$, on a $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln y}$.

Exercice 27 : Déterminer une fonction réelle bijective qui ne vérifie pas toutes les conditions du théorème de la bijection.

Exercice 28 : Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+2x+2}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ dans un intervalle à préciser, et expliciter sa réciproque f^{-1}.

Exercice 29 : Considérons la fonction $f : \begin{array}{rcl}]1\,;+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \exp\left(-\dfrac{1}{\ln(x)}\right) \end{array}.$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter la réciproque de f. Peut-on en conclure que $f^{-1} = f$?

Exercice 30 : Définir la fonction arcsin, réciproque de sin sur des intervalles à préciser et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.

Exercice 31 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 9x}{2\,(x^2 - 1)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-1\,;1[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f^{-1}\left(\dfrac{35}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{35}{12}\right)$.