PTSI - ARCHIMEDE et VINCI

Mathématiques I

Vendredi 8 mars 2024

Durée : **3** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **5** exercices indépendants.

Exercice 1 : Ce QCM est destiné à tester votre connaissance du programme de Terminale.

Une question peut avoir une ou plusieurs réponses valides (mais jamais aucune) qui rapporte $0,5$ *point chacune, une mauvaise réponse enlève* $0,25$ *point, une absence de réponse n'a pas d'incidence.*

Les résultats seront inscrits dans le tableau donné en ANNEXE et à rendre avec la copie.

1 Que vaut $\frac{2}{\frac{2}{5}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}$?

(a) ☐ 1
(b) ☐ $\frac{44}{9}$
(c) ☐ $-\frac{19}{5}$
(d) ☐ $-\frac{16}{5}$

2 Sur $]1\,;+\infty[$, l'expression $\frac{2}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1}$ est aussi égale à :

(a) ☐ $\frac{x+5}{x^2-1}$
(b) ☐ $\frac{x^2+4x-5}{x^3-x^2-x+1}$
(c) ☐ $\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$
(d) ☐ $\frac{x-1}{x^2-1}$

3 L'inéquation $x < x^2$ a pour solutions :

(a) ☐ $\mathbb{R} \setminus [0,1]$
(b) ☐ $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
(c) ☐ $\mathbb{R}$
(d) ☐ $[0, +\infty[$

4 La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$:

(a) ☐ est impaire
(b) ☐ est définie sur $\mathbb{R}^*$
(c) ☐ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$
(d) ☐ est la dérivée de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
(e) ☐ admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

5 La fonction exponentielle :

(a) ☐ est strictement croissante
(b) ☐ est strictement positive
(c) ☐ n'est définie que sur $]0; +\infty[$
(d) ☐ est sa propre dérivée
(e) ☐ est strictement inférieure à 1 si $x < 0$
(f) ☐ vérifie $e^{xy} = e^x + e^y$
(g) ☐ vérifie $e^n = n \times e$.

6 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$:

(a) ☐ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$
(b) ☐ vérifie $u_2 = 36$
(c) ☐ est strictement décroissante
(d) ☐ est une suite géométrique de raison -2
(e) ☐ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$

7 Une primitive sur $]0\,;+\infty]$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est donnée par :

(a) ☐ $\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2x^2}$
(b) ☐ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3x^2}$
(c) ☐ $\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{4x^4}$
(d) ☐ $\mathrm{F}(x) = \frac{2x^2-1}{2x^2}$

Exercice 2 (Mise en jambe) : Montrer que :

1 Pour $a \in \mathbb{R}$, si $\forall \varepsilon > 0, a \leqslant \varepsilon$ alors $a \leqslant 0$.

2 Montrer que si $a + b > 1$, alors $a > \dfrac{1}{2}$ ou $b > \dfrac{1}{2}$.

3 Est-il vrai que si $ab > 1$, alors $a > 1$ ou $b > 1$?

Exercice 3 (Un peu de logique) : On note :

$$\mathscr{P} : \text{« Avoir son examen »} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{Q} : \text{« Travailler régulièrement ».}$$

On considère les propositions suivantes :

(a) Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
(b) Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
(c) Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
(d) Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
(e) Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
(f) Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
(g) Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
(h) Travail régulier implique réussite à l'examen.

Regrouper les propositions équivalentes dans le tableau donné en ANNEXE et à rendre avec la copie.

Problème 4 (Sous-corps) : On note $\sqrt{2}$, l'unique réel positif dont le carré vaut 2.

1 Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dans toute la suite, on pose :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2},\ (a\,;b) \in \mathbb{Q}^2 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

2 Montrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b = 0$.

3 (a) Montrer que $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
(b) Montrer que, $\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2$, $z + z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $zz' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

4 Pour $z = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, on pose $\overline{z} = a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathrm{N}(z) = z\overline{z}$.

(a) Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(z) \in \mathbb{Q}$.
(b) Montrer que $\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2$, $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$.
(c) En déduire que, $\forall\, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(z) \neq 0 \iff \left(\exists\, z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \,/\, zz' = 1\right)$.

5 On pose également $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2},\ (a\,;b) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\left(\exists\, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \,/\, zz' = 1\right) \iff \mathrm{N}(z) = 1$ ou $\mathrm{N}(z) = -1$.

Problème 5 (Fonction particulière) : Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(y)| = |x + y|. \tag{E}$$

On rappelle que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0. \end{cases}$

1 On pose $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x. \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & -x. \end{array}$.

Montrer que f_1 et f_2 vérifient la relation (E).

2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Parmi les deux propriétés suivantes, une seule est vraie, laquelle ?

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = -x), \tag{II.1}$$

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x). \tag{II.2}$$

(b) Donner la négation de la propriété :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

3 Dans les trois questions qui suivent, on suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

Montrer alors que :

(a) $f(0) = 0$.

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |x|$.

(c) $(\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x)$ ou $(\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$.

On pourra mener un raisonnement par l'absurde et utiliser **2** (b) à bon escient.

4 À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse donner l'ensemble des fonctions solutions de (E).

Quand Auguste de Morgan était interrogé sur son âge, il répondait :

« J'avais x années dans l'année x^2. »

En quelle année était-il né ?

Quelqu'un né et mort au XX^e siècle pourrait-il répondre comme Auguste de Morgan à la question sur son âge ?

Nom : . . . . **Prénom :** . . . .

ANNEXE

Exercice 1 :

	a	b	c	d	e	f	g
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Exercice 3 :

$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$	$\rceil\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\rceil\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$