Mathématiques I

Exercice I (« Quand lama fâché, lui toujours faire ainsi ! ») : 9 : +.5-.25

1 Que vaut $\dfrac{2}{\frac{2}{5}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}$?

- a ☑ 1
- b ☐ $\dfrac{44}{9}$
- c ☐ $-\dfrac{19}{5}$
- d ☐ $-\dfrac{16}{5}$

2 Sur $]1\,;+\infty[$, l'expression $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2-1}$ est aussi égale à :

- a ☑ $\dfrac{x+5}{x^2-1}$
- b ☑ $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x^2-x+1}$
- c ☐ $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$
- d ☐ $\dfrac{x-1}{x^2-1}$

3 L'inéquation $x < x^2$ a pour solutions :

- a ☑ $\mathbb{R} \setminus [0,1]$
- b ☑ $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
- c ☐ $\mathbb{R}$
- d ☐ $[0, +\infty[$

4 La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$:

- a ☑ est impaire
- b ☑ est définie sur $\mathbb{R}^*$
- c ☑ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$
- d ☑ est la dérivée de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
- e ☑ admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

5 La fonction exponentielle :

- a ☑ est strictement croissante
- b ☑ est strictement positive
- c ☐ n'est définie que sur $]0; +\infty[$
- d ☑ est sa propre dérivée
- e ☑ est strictement inférieure à 1 si $x < 0$
- f ☐ vérifie $e^{xy} = e^x + e^y$
- g ☐ vérifie $e^n = n \times e$.

6 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$:

- a ☑ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$
- b ☐ vérifie $u_2 = 36$
- c ☐ est strictement décroissante
- d ☑ est une suite géométrique de raison -2
- e ☐ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$

7 Une primitive sur $]0\,;+\infty]$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ est donnée par :

- a ☑ $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
- b ☐ $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{3x^2}$
- c ☐ $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{4x^4}$
- d ☑ $\mathrm{F}(x) = \dfrac{2x^2-1}{2x^2}$

	a	b	c	d	e	f	g
1	✓						
2	✓	✓					
3	✓	✓					
4	✓	✓	✓	✓	✓		
5	✓	✓		✓	✓		
6	✓			✓			
7	✓			✓			

Exercice 2 (Mise en jambe) :

3 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons la contraposée du résultat demandé :

$$a > 0 \implies \exists \varepsilon > 0, a > \varepsilon.$$

Si $a > 0$, il suffit de poser $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ pour avoir $\varepsilon > 0$ et $a > \varepsilon$.

La contraposée est donc prouvée, de même que notre résultat.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, a \leqslant \varepsilon \implies a \leqslant 0.}$$

Commentaires : *J'ai beaucoup trop lu : « $a \leqslant \varepsilon$ et $0 < \varepsilon$ donc par transitivité $a \leqslant 0 < \varepsilon$ » Euh... ? Comment dire ?*

3 2. Encore une fois, la contraposée est plus simple à prouver :

Si $a \leqslant \dfrac{1}{2}$ **et** $b \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $a + b \leqslant 1$. Simplissime !

$$\boxed{a + b > 1 \implies a > \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad b > \frac{1}{2}.}$$

1 3. Prenons $a = b = -\pi$. Alors $ab = \pi^2 > 1$ mais aucune des inégalités strictes $a > 1$ ou $b > 1$ n'est vraie. Ce résultat est donc faux.

Exercice 3 (Un peu de logique) :

1 (a) $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.
1 (b) $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
1 (c) $\rceil \mathcal{Q} \implies \rceil \mathcal{P}$ équivalente à $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
1 (d) $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

(e) $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.
(f) $\rceil \mathcal{Q} \implies \rceil \mathcal{P}$ équivalente à $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
(g) $\rceil \mathcal{P} \implies \rceil \mathcal{Q}$ équivalente à $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.
(h) $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

Donc,

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$
(b), (c), (d), (f)	(a), (e), (g), (h)

Problème 4 (Sous-corps) :

3+1 **1** *confer* cours.

Commentaires : *N'oubliez pas de supposer que p et q sont premiers entre eux sinon vous n'obtiendrez pas de contradiction.*

3 **2** Supposons $(a\,;b) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$. Ce qui est équivalent à $a = -b\sqrt{2}$.

Si $b = 0$, alors $a = 0$ et le résultat est prouvé.

Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ et le résultat de la question **1**.

Donc, $b = 0$ et on est ramené au cas précédent.

Réciproquement, il est clair que $a = b = 0$ entraine $a + b\sqrt{2} = 0$.

En conclusion,

$$\boxed{a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = b = 0.}$$

Commentaires : *Même si elle est triviale, il ne faut pas oublier de prouver (ou de dire qu'elle est vraie) la réciproque.*

1 **3** (a) Il suffit d'écrire $1 = 1 + 0\sqrt{2}$. Donc, $\boxed{1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$.

2 (b) Posons $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = c + d\sqrt{2}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Il suffit de faire les calculs :

$$z + z' = a + b\sqrt{2} + \left(c + d\sqrt{2}\right) = \underbrace{a + c}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(b + d)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

$$zz' = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = \underbrace{ac + 2bd}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

$$\boxed{\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2,\ z + z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \text{ et } zz' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].}$$

Commentaires : *On dit que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est stable par somme et produit.*

1 **4** (a) Soit $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Il suffit de calculer :

$$\mathrm{N}(z) = z\bar{z} = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathrm{N}(z) \in \mathbb{Z}.}$$

(b) Soient $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = c + d\sqrt{2}$ deux éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Il suffit encore de calculer en se servant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(zz') &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)\overline{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)} \\
&= \left(ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}\right)\left(ac + 2bd - (ad + bc)\sqrt{2}\right) \\
&= (ac + 2bd)^2 - 2\,(ad + bc)^2 \\
&= a^2c^2 + \cancel{4abcd} + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - \cancel{4abcd} - 2b^2c^2. \\
\mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z') &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right) \\
&= \left(a^2 - 2b^2\right)\left(c^2 - 2d^2\right) \\
&= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall\ (z\,;z') \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2,\ \mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z').}$$

Commentaires : *Attention ! On ne sait pas que l'opération « conjugué» est compatible avec le produit de deux éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ i.e. $\overline{z}\overline{z'} = \overline{zz'}$.*

4 (c) Soit $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tel que $\mathrm{N}(z) \neq 0$. On peut alors écrire $z \times \dfrac{\overline{z}}{\mathrm{N}(z)} = \dfrac{z\overline{z}}{z\overline{z}} = 1$.

D'après 4 (a), $\mathrm{N}(z) \in \mathbb{Z}$ et il est clair que $\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{N}(z)} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On a donc bien trouvé un inverse à z dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. S'il existe $z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ tel que $zz' = 1$ alors $\mathrm{N}(zz') = 1$ ou encore $\mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z') = 1$. La norme de z ne peut être nulle.

Donc

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ \mathrm{N}(z) \neq 0 \iff \left(\exists\, z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\,/\,zz' = 1\right).}$$

Commentaires : *La jauge N permet donc de caractériser les inversibles de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.*

4 5 En remarquant que $\mathrm{N}(1) = 1$, si $zz' = 1$ alors $\mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z') = 1$.

D'après 4 (a), $\mathrm{N}(z)$ est donc inversible dans $\mathbb{Z}$ *i.e.* $\mathrm{N}(z) = 1$ ou $\mathrm{N}(z) = -1$.

Réciproquement, si $\mathrm{N}(z) = 1$ ou $\mathrm{N}(z) = -1$, il suffit de prendre respectivement $z' = \overline{z}$ ou $z' = -\overline{z}$.

Il est assez clair que, dans tous les cas, $z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ \left(\exists\, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\,/\,zz' = 1\right) \iff \mathrm{N}(z) = 1 \text{ ou } \mathrm{N}(z) = -1.}$$

Problème 5 : On considère l'équation du sujet :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(y)| = |x + y|. \tag{E}$$

2 1 Il suffit d'écrire :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f_1(x) + f_1(y)| = |x + y|.$$

De même,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f_2(x) + f_2(y)| = |-x-y| = |-(x+y)| = |x+y|.$$

Donc, $\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ vérifient la relation (E).}}$

Commentaires : *Bizarrement, peu savent que $|-x-y| = |-(x+y)| = |x+y|$.*

2 2 (a) L'assertion $|f(x)| = |x|$ à traduire suit le quantificateur sans retour en arrière donc c'est la seconde proposition qui est vraie :

$$\boxed{(\forall\, x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x).}$$

1 (b) $\boxed{(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq x_0) \text{ et } (\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \neq -x_1)}$.

En gros, f n'est ni l'identité, ni la symétrie par rapport à 0.

3 Soit f vérifiant la proposition (E).

1 (a) Pour $x = y = 0$, on a alors $|f(0)+f(0)| = |0+0| \iff |f(0)| = |0| = 0 \iff \boxed{f(0) = 0}$.

2 (b) Pour $y = 0$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(0)| = |x + 0| \iff \boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|.}$$

(c) Supposons que f vérifie (E) et la relation trouvée en 2 (b) :

$$(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq x_0) \text{ et } (\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \neq -x_1).$$

D'après 3 (b), la fonction f est telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |x|$ *i.e.*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x.$$

Comme $f(x_0) \neq x_0$, le seul choix possible pour $f(x_0)$ est donc $f(x_0) = -x_0$.

Par le même raisonnement, $f(x_1) = x_1$.

On a alors $|f(x_0) + f(x_1)| = |-x_0 + x_1| = |x_1 - x_0|$.

Si f vérifie (E) alors on aurait

$$|x_0 + x_1| = |x_1 - x_0| \iff \begin{array}{ccc} x_0 + \cancel{x_1} = \cancel{x_1} - x_0 & \text{ou} & \cancel{x_0} + x_1 = -x_1 + \cancel{x_0} \\ x_0 = 0 & & x_1 = 0. \end{array}$$

Comme $f(0) = 0$, ceci est impossible par définition de x_0 et x_1 d'où la contradiction *i.e.*

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

Autrement dit, $\boxed{f = f_1 \text{ ou } f = f_2.}$

4 4 On a vu à la question 3 (c) que toute fonction f solution de (E) est nécessairement l'une des deux fonctions f_1 ou f_2. C'est la phase d'analyse.

Réciproquement, la question 1 montre qu'être une de ces deux fonctions est une condition suffisante. C'est la phase de synthèse.

Conclusion, les seules fonctions $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfaisant (E) sont l'identité f_1 ou la symétrie f_2.