Fonctions de référence

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Mars 2024

Sommaire I

Sommaire II

Plan d'étude d'une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f i.e. on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.

Plan d'étude d'une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f i.e. on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.
2. On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas i.e. on ne travaille pas pour rien.

Plan d'étude d'une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f i.e. on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.
2. On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas i.e. on ne travaille pas pour rien.
3. On détermine les limites de f au extrémités du domaine d'étude avant de les étendre au domaine de définition tout entier par symétrie ou translation.
   On effectue ici l'étude asymptotique de la fonction en dégageant les asymptotes éventuelles à la courbe.

Plan d’étude d’une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

4. On effectue l'étude locale en précisant les variations de la fonction. Dans le cas d'une fonction dérivable (ce que l'on justifiera) on calcule et on factorise f' afin d'en étudier le signe. On détermine également les points d'annulation de la dérivée afin d'avoir les lieux des tangentes « horizontales ».

Plan d'étude d'une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

4. On effectue l'étude locale en précisant les variations de la fonction.
   Dans le cas d'une fonction dérivable (ce que l'on justifiera) on calcule et on factorise f' afin d'en étudier le signe. On détermine également les points d'annulation de la dérivée afin d'avoir les lieux des tangentes « horizontales ».
5. On dresse le tableau de variation de f en y reportant toutes les informations obtenues et, selon les cas, ses extrema, des valeurs remarquables, …

Plan d'étude d'une fonction :

Méthode 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

6. On trace l'allure de la courbe représentative de f :
   1. On trace les asymptotes à la courbe si elle existe.
   2. On place les extrema locaux avec leur tangente « horizontale » et les demies-tangentes « verticales » s'il y en a.
   3. On place quelques points essentiels : ni trop, ni trop peu et suffisamment pour donner une idée de la courbe.
   4. Le coude dans la concavité, on trace une jolie courbe, sans lever le crayon si la courbe est continue ni repasser et en s'appliquant bien à rendre **la courbe tangente aux extrema locaux**.

Définition 1 :

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des réels.

Si $a_n \neq 0$,

- n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ;
- a_n est le **coefficient dominant** ;
- $a_n x^n$ est le **monôme dominant**.

On dit qu'un réel α est une **racine** (ou un **zéro**) de la fonction polynomiale lorsque $f(\alpha) = 0$.

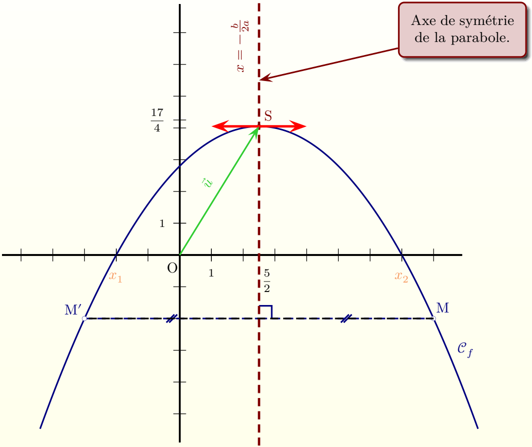


Figure 1 – Courbe représentative de

$$x \longmapsto -\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} = -\frac{1}{5}(x+2)(x-7).$$

Exemples 1 :

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax+b$ sont dites affines.
- Le produit de deux fonctions affines est un polynôme du second degré appelé aussi trinôme. Leur courbe est une parabole.
  Dans le cas où $a \neq 0$, on a :

$$x \longmapsto ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta \qquad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-ac}{4a}.$$

Forme canonique

$$= a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \text{si } \Delta = b^2-ac > 0$$

$$\text{avec } x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= a(x-x_0)^2 \qquad \text{si } \Delta = 0 \text{ avec } x_0 = \frac{-b}{a}.$$

Forme factorisée

x	$-\infty$	x_1	$-\dfrac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$2ax+b$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ 0	↗ $+\infty$

Figure 2 – Tableau de variation d'un trinôme du second degré $x \longmapsto ax^2+bx+c$ dans le cas où $a>0$ et $\Delta>0$.

Exemples 1 :

- Les fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ne sont pas polynomiales.
- On appelle valuation d'un polynôme le plus petit exposant apparaissant dans sa forme réduite.

Théorème 1 (Admis pour l'instant) :

- Une fonction polynomiale de degré $n > 0$ a au plus n racines distinctes.

Théorème 1 (Admis pour l'instant) :

- Une fonction polynomiale de degré $n > 0$ a au plus n racines distinctes.
- Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$.
  a est une racine de f si, et seulement si on peut factoriser $f(x)$ par $(x - a)$.

Autrement dit, a est une racine de f polynomiale de degré n si, et seulement si il existe une fonction polynomiale Q (de degré $n - 1$) telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - a)\mathrm{Q}(x).$$

Méthode 2 :

Connaissant une racine d'un polynôme, il y a deux méthodes essentielles pour factoriser un polynôme connaissant une racine :

1. Par identification.
2. Par division euclidienne.
3. Par l'algorithme de Hörner.

Factoriser et Développer une expression avec la simple distributivité

Factoriser

$$ka + kb = k\,(a+b).$$

Développer

Factoriser et Développer une expression avec les identités remarquables

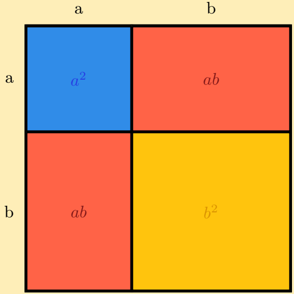


Figure 2 – $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Factoriser et Développer une expression avec les identités remarquables

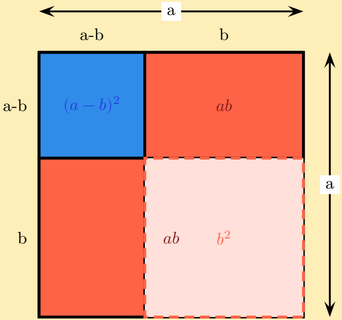


Figure 2 – $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Factoriser et Développer une expression avec les identités remarquables

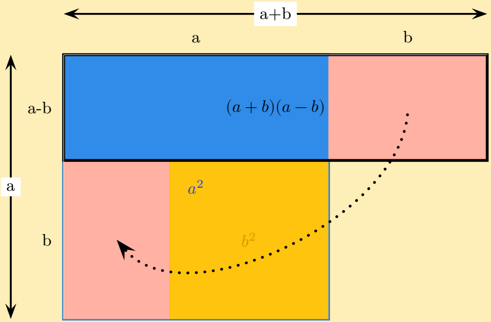


Figure 2 – $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exemple 2 (Division euclidienne) :

Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ dont 1 est racine.

Effectuons la division euclidienne de f par $x - 1$:

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
1x^4 & + & 5x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & x-1 \\
\cline{10-10}
-(x^4 & - & x^3) & & & & & & & 1x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
\cline{1-3}
 & & 6x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & -(6x^3 & - & 6x^2) & & & & & \\
 & & & & 11x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & & & -(11x^2 & - & 11x) & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 6x & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6x & - & 6) & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 & \\
\end{array}
$$

On obtient donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$.

Exemple 2 (Division euclidienne) :

Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ dont 1 est racine.

$$\text{On obtient donc, } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$$

Et l'on peut poursuivre...

$$\begin{aligned} &= (x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Factoriser au maximum les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

1. $\mathrm{A} = (x-3)^2 - 16$
2. $\mathrm{B} = x^3 - 1$
3. $\mathrm{C} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Théorème 2 :

- Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction polynomiale de coefficient dominant a_n.
  Alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = signe(a_n) \times \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n$.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction polynomiale est celle de son monôme de plus haut degré.

Exercice 2 :

Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions polynômiales définies par :

1. $f(x) = x^2 + 3x - 5$
2. $g(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2x + 1.$
3. $h(x) = 3x^6 - x^4 + 2x + 3.$
4. $j(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2.$

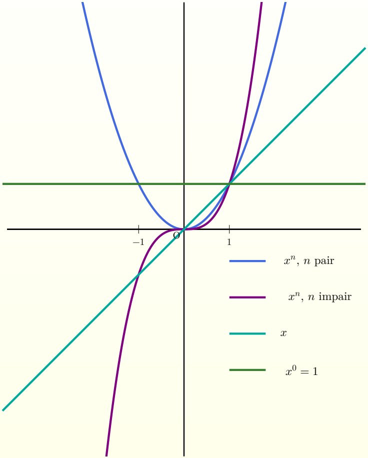


Figure 3 – Limites en l'infini des fonctions $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Les fonctions rationnelles

Définition 2 :

On appelle fonction rationnelle tout quotient de fonctions polynomiales de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et $b_0, b_1, \cdots, b_m$ sont des réels.

- Les racines du numérateur sont toujours appelées les racines de f.
- Les racines du dénominateur sont appelées les pôles de f.
- Si $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on prolonge la notion de degré d'un polynôme aux fractions rationnelles en posant : $\deg(f) = n - m$.

Remarque : Une fraction rationnelle aura au plus autant d'asymptotes verticales que ce qu'elle a de pôles.

Exemple 3 :

On appelle fonction homographique toute fonction rationnelle définie par le quotient de deux fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ et $x \longmapsto cx+d$ non proportionnelles *i.e.* $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c}}{cx+d}.$$

- Sa courbe, appelée hyperbole, admet deux asymptotes d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ dont le point d'intersection est le centre de symétrie de la courbe.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\},\ f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$-$	‖	$-$
f	$\dfrac{a}{c} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \dfrac{a}{c}$

Figure 4 – Tableau de variation d'une fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dans le cas où $ad-bc<0$ et $c \neq 0$.

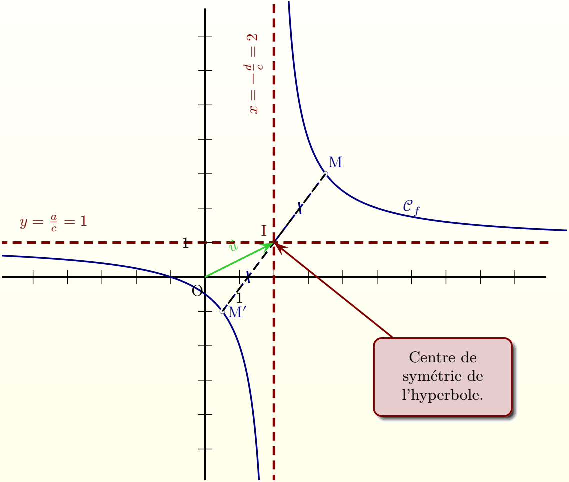


Figure 5 – Courbe représentative de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Théorème 3 :

- Les fonctions rationnelles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ privé de leurs pôles.
- Soit f une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ de degré $r = n - m \in \mathbb{Z}$ et $b_m \neq 0$.
  Alors $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = signe\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times \lim_{x\to\pm\infty} x^r$.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Remarque : Une fraction rationnelle admet une asymptote horizontale si, et seulement si son degré est négatif ou nul et, dans ce cas, son équation est $y = 0$ ou $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ respectivement.

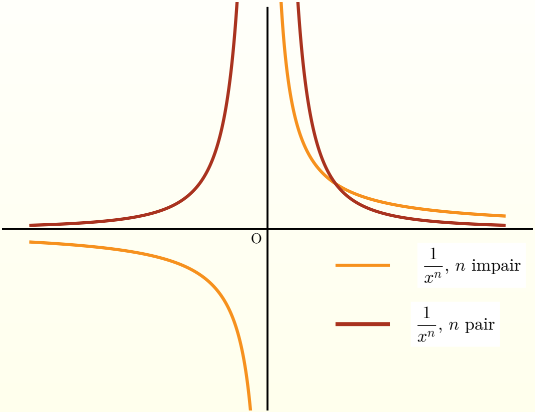


Figure 6 – Limite en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{-x^2+x+6}$

III. La fonction logarithme népérien

III. La fonction logarithme népérien

1. Le logarithme est défini pour tout x strictement positif

Rappel :

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) :

On appelle fonction **logarithme népérien**, notée ln, l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\ln} = \left]0\,;+\infty\right[\,.}$$

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(5x-3)$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{1-x}\right)$
3. $h(x) = \ln(x^2-2x+1)$

Théorème 4 :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 4 :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(|x|)$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Ce résultat a déjà été établi pour $x > 0$, et il reste valable pour $x < 0$ car on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

En conséquence, $x \longmapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

La stricte croissance de ln s'interprète dans les inégalités :

Corollaire 4.1 :

Soient a et b deux réels **strictement positifs**.

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.
- $\ln(a) = 0 \iff a = 1$ et $\ln(a) > 0 \iff a > 1$.

Exemple 4 :

Résoudre $\ln(2 - 2x) = \ln 2$.

Tout d'abord les conditions d'existence. Cette équation ne sera valide que si $2 - 2x > 0$ *i.e.* $x \in \left]-\infty\,;1\right[$.

Il suffit alors de résoudre en appliquant les propriétés ci-dessous :

$$\ln(2 - 2x) = \ln 2 \iff 2 - 2x = 2 \iff x = 0.$$

Comme $0 < 1$, on a $\mathcal{S} = \{0\}$.

Théorème 5 :

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Comme u est nécessairement positive, le signe de $\left(\ln u\right)'$ est le même que celui de u' *i.e.* les fonctions $\ln u$ et u ont le même sens de variations sur I.[1]
En mieux, ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, composée par elle ne change pas la monotonie.

1. Attention ! Elles peuvent ne pas avoir et n'ont surement pas le même domaine de définition.

III. La fonction logarithme népérien
3. Composée

Exemple 5 :

La fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ a les mêmes variations que $x \longmapsto 1 + x^2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

III. La fonction logarithme népérien

4. Le logarithme transforme les produits en sommes

Proposition 6 (Propriétés algébriques) :

Soient $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{Q}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

La relation 1 est appelée relation fondamentale du logarithme. Elle va imposer une croissance très, très, très faible.

En particulier, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x).}$

Proposition 6 (Propriétés algébriques) :

Soient $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{Q},\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

La relation 1 est appelée relation fondamentale du logarithme. Elle va imposer une croissance très, très, très faible.

En particulier, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x).}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x = \ln\left(\sqrt{x}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{x}\right) \iff \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

Exemples 6 :

1. $\ln 50 = \ln\left(5^2 \times 2\right) = 2\ln 5 + \ln 2.$

Exemples 6 :

1. $\ln 50 = \ln\left(5^2 \times 2\right) = 2\ln 5 + \ln 2$.
2. $\ln\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\ln\left(2^2 \times 3\right) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$.
   Ces deux premiers exemples montrent, qu'à l'époque bénie où les calculatrice n'existaient pas, une simple table avec les valeurs approchées des logarithmes des 10 premiers entiers suffisait à faire bien des calculs !

Exemples 6 :

1. $\ln 50 = \ln\left(5^2 \times 2\right) = 2\ln 5 + \ln 2$.
2. $\ln\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\ln\left(2^2 \times 3\right) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$.
   Ces deux premiers exemples montrent, qu'à l'époque bénie où les calculatrice n'existaient pas, une simple table avec les valeurs approchées des logarithmes des 10 premiers entiers suffisait à faire bien des calculs !
3. Déterminons l'entier n tel que $2^n > 10000$.

$$2^n > 10000 \underset{\substack{\text{ln str.}\\ \text{croissante}}}{\Longleftrightarrow} n\ln 2 > \ln(10000) = 4\ln(10)$$

$$\Longleftrightarrow \; n > 4\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \quad \text{car } \ln 2 > 0\,!.$$

Comme $4\,\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 13,3$, l'entier n devra être supérieur à 14.

Corollaire 6.1 :

Pour tout réels strictement positifs, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}\right) &= \ln(a)_1 + \ln(a)_2 + \dots + \ln(a)_n - \ln(b)_1 - \ln(b)_2 - \dots - \ln(b)_m \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(a)_k - \sum_{k=1}^{m} \ln(b)_k.\end{aligned}$$

Cette propriété est souvent utilisée pour linéariser les expressions.

Exemple 7 :

L'image d'une suite géométrique par la fonction logarithme est une suite arithmétique.

En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_0 *i.e.*

$$\begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = qu_n. \end{cases}$$

Alors $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln q$. La suite $\left(\ln u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $\ln u_0$.

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$

En particulier, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de ln en 0^+.

Théorème 8 :

La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 8 :

La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, 1 admet un unique antécédent par ln, noté e :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e} \simeq 2,71828.$$

Théorème 9 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

On aura bien mieux avec la proposition (21) .

Au voisinage des bornes, la fonction ln est « écrasée » par les fonctions polynômes qui lui imposent leur limite.

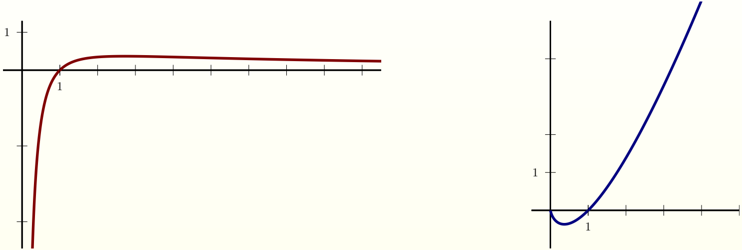


Figure 7 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $x \longmapsto x\ln(x)$.

Exemple 8 :

$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$

III. La fonction logarithme népérien

7. Le logarithme est au-dessous de ses tangentes

Proposition 10 (Tangentes) :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1.$

Proposition 10 (Tangentes) :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$
- $\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1.$

Remarques :

- Par une petite translation, on obtient du même coup que, pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$,

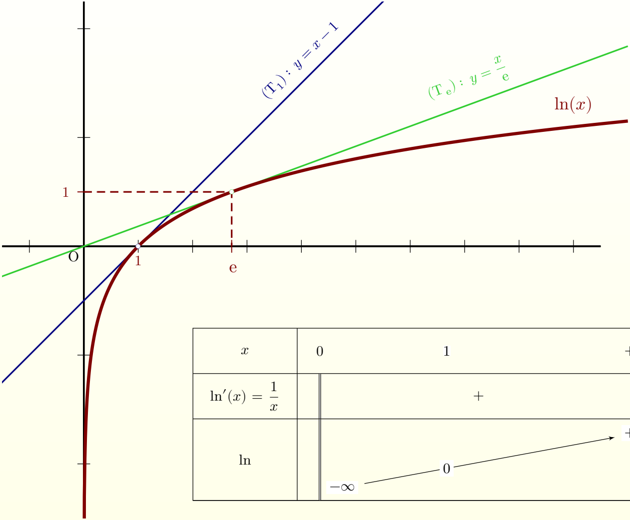
$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

Proposition 10 (Tangentes) :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\quad \ln(x)\leqslant x-1$.

Remarques :

- Par une petite translation, on obtient du même coup que, pour tout $x\in\,]-1\,;+\infty[$,
$$\ln(1+x)\leqslant x.$$
- Pour anticiper un peu sur les prochains chapitre comprenez, en regardant l'avant dernière limite qu'au voisinage de 1, la fonction ln se comporte globalement comme la fonction affine $x\longmapsto x-1$ qui n'est autre que sa tangente en 1.



x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖		$+$		
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 8 – Courbe représentative de $x \longmapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.

IV. La fonction exponentielle népérienne

On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc envisager sa fonction réciproque.

Définition 4 (Exponentielle) :

On appelle fonction **exponentielle népérienne** la fonction bijection réciproque de ln, notée exp telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \exp y = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \qquad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{array}$$

On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc envisager sa fonction réciproque.

Définition 4 (Exponentielle) :

On appelle fonction **exponentielle népérienne** la fonction bijection réciproque de ln, notée exp telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} \exp y = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{array}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.} \tag{1}$$

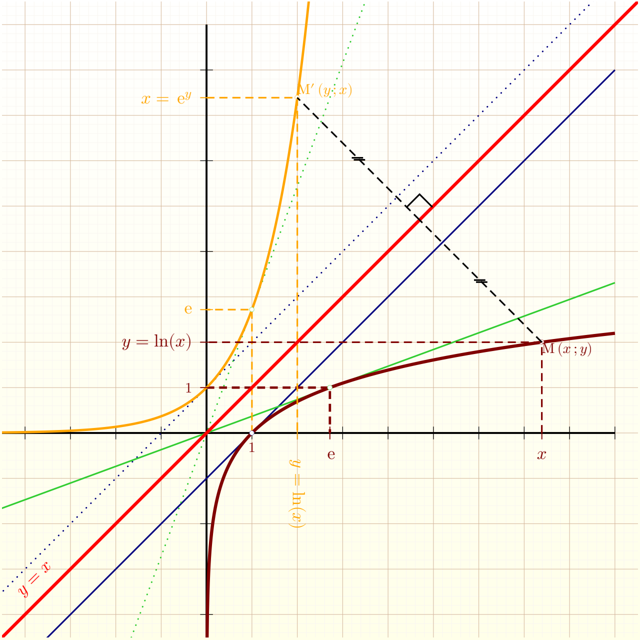


Figure 9 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Rapidement, en utilisant la définition d'une fonction réciproque, on obtient :

Théorème II :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Exercice 6 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(1 - e^x)$
2. $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x-2} - 2}$
3. $h(x) = \sqrt{5 - e^x}$

Corollaire III.1 :

Dans un repère orthonormal, les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

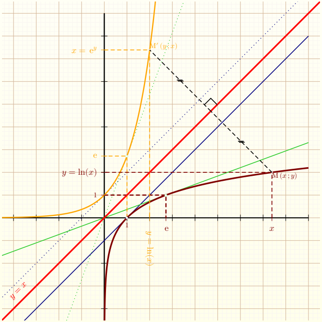


Figure 10 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice

Théorème 12 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV. La fonction exponentielle népérienne

2. L'exponentielle est strictement croissante

Théorème 12 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \big(\exp\big)'(x) = \exp(x). \tag{2}$$

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} \qquad\qquad f(0) &= 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= f(x) \end{cases} \tag{3}$$

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= f(x) \end{cases} \tag{3}$$

Remarque 1 : Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (3) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

IV. La fonction exponentielle népérienne

2. L'exponentielle est strictement croissante

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) & = f(x) \end{cases} \tag{3}$$

Remarque 1 : Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (3) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2 : Il n'existe qu'une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (3).

Corollaire 12.1 :

Soient a et b deux réels.

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$.
- $\exp(a) = 1 \iff a = 0$ et $\exp(a) > 1 \iff a > 0$.

Proposition 13 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,7182818284590452353602874713526624977572\; 4709369995957496696762772407663035354759\ldots$$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$.

- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$ et $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.

Remarques :

- Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit
  $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$.
  On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

Remarques :

- Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit
  $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$.
  On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

- Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :
  1. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

On retrouve alors le résultat de (1).

Remarques :

- Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit
  $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$.
  On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

- Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :
  1. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 = \exp 0 = \exp(x-x) = \mathrm{e}^x \times e^{-x} \implies \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0.$$

  En particulier, $\exp(x)$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour tout x.

On retrouve alors le résultat de (1).

Remarques :

- Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit
  $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$.
  On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

- Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :
  1. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \mathrm{e}^x \times e^{-x} \implies \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0.$$

     En particulier, $\exp(x)$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour tout x.
  2. que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives :

On retrouve alors le résultat de (1).

Remarques :

- Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit
  $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$.
  On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

- Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :
  1. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

     $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \mathrm{e}^x \times e^{-x} \implies \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0.$$

     En particulier, $\exp(x)$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour tout x.
  2. que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives :

     $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0.$$

  On retrouve alors le résultat de (1).

Exercice 7 :

On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + 30\,\mathrm{e}^{-x} = 17$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(17x-30)$.

Théorème 14 :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$.

En particulier, l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$.

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0..$

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0..$

En particulier, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0^-$.

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$..

Remarque : Si nécessaire, on peut affiner un peu suivant la parité de n :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$..

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynômes en $+\infty$

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0..$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynômes en $+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^-$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur $\dfrac{1}{x^n}$ en $-\infty$.
  Ces considérations auront des conséquences sur la représentation graphiques et il faudra bien donner l'impression que la courbe « monte ou descend » très vite.

Théorème 15 (Croissance comparée) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \, \mathrm{e}^x = 0..$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynômes en $+\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \, \mathrm{e}^x = 0^-$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur $\dfrac{1}{x^n}$ en $-\infty$.
  Ces considérations auront des conséquences sur la représentation graphiques et il faudra bien donner l'impression que la courbe « monte ou descend » très vite.

On aura bien mieux avec la proposition (21) .

Exemple 9 :

Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \mathrm{e}^{-x}$.

On a $x + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} + 1\right) = \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^{x} + 1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{x} = 0$, d'après les théorèmes sur les sommes de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,\mathrm{e}^{x} + 1) = 1$ puis, d'après les théorèmes sur les produits de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^{x} + 1) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} \times 1 \underset{\substack{\uparrow\\ u=-x}}{=} \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{u} = +\infty.$$

Exercice 8 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\,(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

Théorème 16 :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1.$

Comme pour le logarithme, la première assertion exprime que la fonction exp se comportent comme la fonction $x \longmapsto x + 1$ au voisinage de 0. Sa tangente en ce point. C'est un fait général pour les fonctions dérivables.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$				$+$			
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

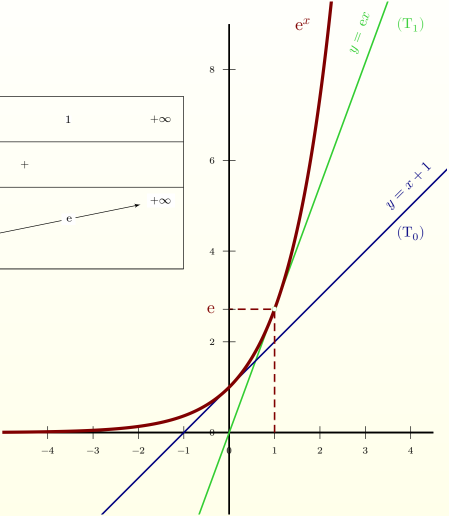


Figure 11 – Courbe représentative de $x \longmapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.

Proposition 17 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u' \times \mathrm{e}^u.$$

Exercice 9 :

Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée des fonction définies par :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
2. $g(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{x})$
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)$

V. Les fonctions puissances

V. Les fonctions puissances

Lorsque n n'est plus entier, la notation $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$, introduite en 4e ne suffit plus. En effet, que penser de $2^{\frac{5}{3}}$, 3^{π} ou $7^{\sqrt{2}}$?

Lorsque n est un entier (et a strictement positif),

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \ldots \times e^{\ln(a)}}_{n \text{ fois}} = \mathrm{e}^{\overbrace{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)}^{n \text{ fois}}} \\ &= \mathrm{e}^{n \ln(a)}. \end{aligned}$$

V. Les fonctions puissances

1. Fonction exponentielle de base $a > 0$

Définition 5 (Exponentielle de base a) :

Pour tout réel a strictement positif et tout réel x, on pose :

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.$$

Remarque : $a > 0$ s'impose par le fait que figure $\ln(a)$ dans l'expression.

Exemples 10 :

À la calculatrice, on obtient :

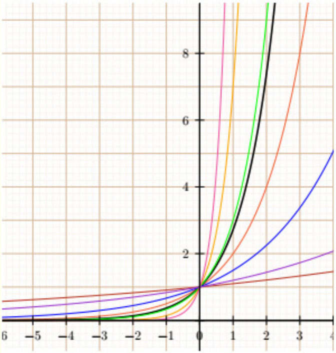
- $2^{\frac{5}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\ln 2} \simeq 3,2$
- $3^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi\ln 3} \simeq 31,5$
- $7^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln 7} \simeq 15,7$

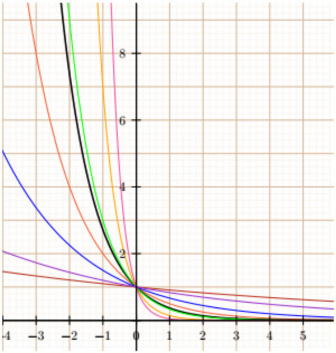
Cas $a > 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$			$+$		
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$			$+$		
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0





Exercice 10 :

Simplifier les écritures suivantes :

1. $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$.
2. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$
3. $27^{\frac{5}{3}}$

Proposition 18 (Propriétés algébriques) :

Pour tous réels a et b strictement positifs et quels que soient les réels r et s, on a :

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$
2. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^r \times b^r = (ab)^r$
5. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

La relation 5 est une généralisation de la relation 4 de la proposition (6) .

Méthode 3 :

Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, u à valeur strictement positive, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle $\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ pour en simplifier l'étude.

ATTENTION

La définition (5) permet donc de prolonger les propriétés de a^n en remplaçant $n \in \mathbb{Z}$ par $x \in \mathbb{R}$ ce qui est bien mais ce prolongement a un prix à payer : a doit nécessairement être strictement positif. On ne peut pas tout avoir !

Définition 6 :

Pour tout réel α et tout réel x strictement positif, on pose :

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}.$$

Remarque : Comme pour la partie précédente, la présence de ln restreint le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ à $\mathbb{R}_+^*$. Ce n'est donc qu'un prolongement **partiel** des fonctions polynômiales x^n ou rationnelles $\dfrac{1}{x^n}$ que vous connaissez.

Exercice ll :

Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants :

1. 3^{-x}
2. x^2
3. $\sqrt{x}$
4. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$
5. x^x
6. x^{x^x}

Théorème 19 :

Soit α un réel fixé.

La fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Remarque : Nouvelle preuve de la cohérence de cette notation, on retrouve ici encore la dérivée d'une fonction polynôme lorsque n est entier : $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Le signe de la dérivée dépend donc de celui de α.

Proposition 20 :

Soit α un réel fixé.

$$\alpha > 0 : \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$
$$\alpha < 0 : \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = 0.$$

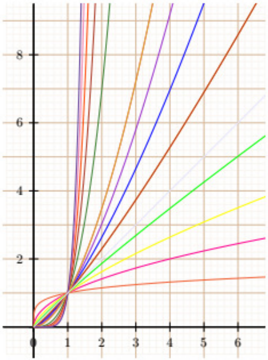
Prolongement par continuité : Dans le cas, $\alpha > 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 en posant naturellement $0^\alpha = 0$.
On dit alors que l'on a prolongé la fonction puissance par continuité en 0.
Cette nouvelle fonction puissance qui coïncide avec l'ancienne sur $]0\,;+\infty[$ est alors définie sur $[0\,;+\infty[$. On les confondra désormais.

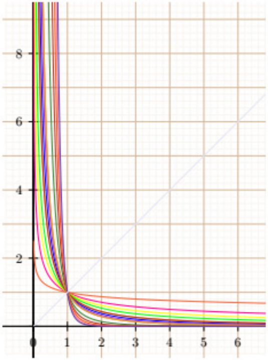
Cas $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0;1[$) :

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$+$	
x^{α}	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$:

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$-$	
x^{α}	$+\infty$ ↘	1 ↘	0





ATTENTION

Pour $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, signe qu'elle N'est PAS dérivable en 0. C'est typiquement ce qui arrive à la fonction racine carrée.

V. Les fonctions puissances

2. Fonction puissance réelle

Réciprocité : Pour tout réel α non nul et tout $x > 0$, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & [0\,;+\infty[\\ x & & x^{\alpha} \end{array}$$

réalise une bijection [2].

2. son prolongement plutôt

V. Les fonctions puissances

2. Fonction puissance réelle

Réciprocité : Pour tout réel α non nul et tout $x > 0$, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & x^{\alpha} \end{array}$$

réalise une bijection.
Elle admet donc une fonction réciproque définie sur $[0\,;+\infty[$ que l'on vérifiera coïncider avec la fonction :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & x^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}$$

Réciprocité :

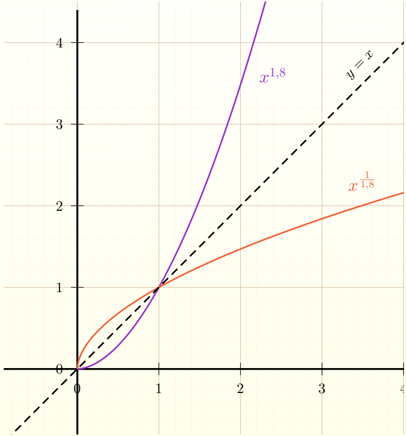


Figure 14 – Les courbes représentatives de $x \longmapsto x^{\alpha}$ et de sa réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

V. Les fonctions puissances

2. Fonction puissance réelle

Fonction racine n-ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n-ième*, la réciproque de $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt[n]{\ } : \quad \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Fonction racine n-ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n-ième*, la réciproque de $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt[n]{\ } : \quad \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

De plus, on remarquera que pour tout x strictement positif et $n \geqslant 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

V. Les fonctions puissances

2. Fonction puissance réelle

Fonction racine n-ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n-ième*, la réciproque de $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt[n]{\ } : \quad \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

De plus, on remarquera que pour tout x strictement positif et $n \geqslant 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Enfin, si n est impair, on prolonge la définition à $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. On parle de croissances comparées

Proposition 21 (Croissances comparées) :

Pour tous α, β strictement positifs.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\beta}\,\big|\ln(x)\big|^{\alpha} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^{\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$

Remarque : Ces résultats nous permettent d'avoir en tête un « classement » des prépondérances en $+\infty$:

$$\boxed{1 \prec \big(\ln(x)\big)^{\alpha} \underset{\alpha<\alpha'}{\prec} \big(\ln(x)\big)^{\alpha'} \prec x^{\beta} \underset{\beta<\beta'}{\prec} x^{\beta'} \prec \mathrm{e}^{x} \underset{\mathrm{e}<\mathrm{f}}{\prec} \mathrm{f}^{x}.}$$

Exercice 12 :

Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 et en $+\infty$.
2. $x \longmapsto x \ln \sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$.
3. $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{\mathrm{e}^{x} + x^2}$ en $\pm\infty$.

VI. La fonction logarithme décimal

VI. La fonction logarithme décimal

Définition 7 :

On appelle **logarithme décimal**, la fonction, notée log, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Le logarithme népérien est ainsi la « fonction logarithme de base e », la fonction log, celle de base 10 ». Pour tout réel $a > 0$, on peut ainsi définir n'importe quel logarithme de base a que l'on note $\log_a$.

Exemple 11 (Nombre de chiffres en écriture décimale) :

Un nombre $\mathrm{N} \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 *i.e.*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*,\ /\ 10^p \leqslant \mathrm{N} < 10^{p+1} \qquad \textit{i.e. } \mathrm{N} \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction log est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \log 10^p & \leqslant \log \mathrm{N} < & \log(10)^{p+1} \\ p & \leqslant \log \mathrm{N} < & p+1. \end{array}$$

On a donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2024^{2025}\right) \simeq 6695{,}1$. Le nombre 2024^{2025} s'écrit avec 6696 chiffres !

VI. La fonction logarithme décimal

Exemple 11 (Nombre de chiffres en écriture décimale) :

Un nombre $\mathrm{N} \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 *i.e.*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*, \ /\ 10^p \leqslant \mathrm{N} < 10^{p+1} \quad \textit{i.e.}\ \mathrm{N} \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction log est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{array}{ccc} \log 10^p & \leqslant \log \mathrm{N} < & \log(10)^{p+1} \\ p & \leqslant \log \mathrm{N} < & p+1. \end{array}$$

On a donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2024^{2025}\right) \simeq 6695,1$. Le nombre 2024^{2025} s'écrit avec 6696 chiffres !

Un autre, $\log(46!) \simeq 57,76$. On en déduit que $46!$ est un nombre à 58 chiffres !

VI. La fonction logarithme décimal

Proposition 22 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \log\left(10^{x}\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ 10^{\log(x)} = x.$$

VI. La fonction logarithme décimal

Proposition 22 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \log\left(10^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ 10^{\log(x)} = x.$$

$\log(10) = 1$ et, d'une manière générale $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$\log(10)^n = \dfrac{\ln(10)^n}{\ln(10)} = n \times \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = n.$
Mieux, la fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel x, associe $\mathrm{e}^{x\ln(10)} = 10^x$.

VI. La fonction logarithme décimal

Exercice 13 :

Montrer que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

VI. La fonction logarithme décimal

Proposition 23 :

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad$ et $\quad \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$
- $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log(y).$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \log(x^n) = n\log(x) \quad$ et $\quad \log(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\log(x).$

Exercice 14 :

Exprimer en fonction de $\log(2)$ les nombres suivants :

1. $\log(20)$
2. $\log(2000)$
3. $\log(0,008)$
4. $\log(1,024)$
5. $\log\left(\dfrac{1}{0,00064}\right)$
6. $\log\left(1,28 \times 2^{27}\right)$

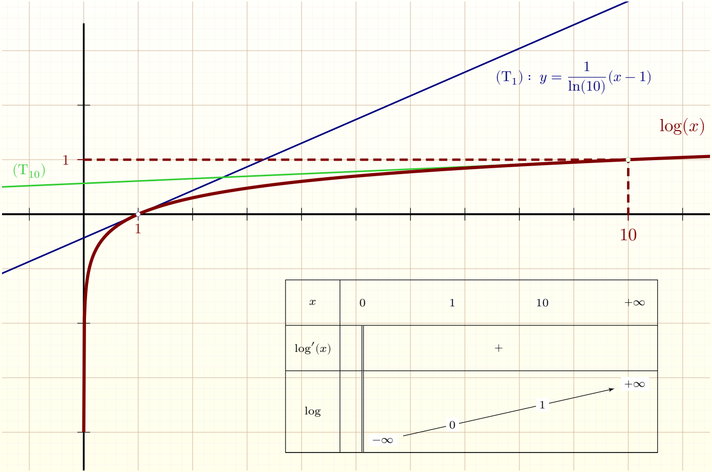
Comme $\ln(10) > 0$, les fonctions $\log = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \ln$ et $\ln$ ont les mêmes variations et les mêmes limites.

Proposition 24 :

La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

VI. La fonction logarithme décimal



x	0	1	10	$+\infty$
$\log'(x)$	‖	$+$		
$\log$	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

Figure 15 – Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \log(x)$ et sa tangente en 1.

VI. La fonction logarithme décimal

Parfois, on utilise des unités logarithmiques, c'est-à-dire dont la valeur est le logarithme du rapport entre deux valeurs (v_{min} et v_{max}) d'une grandeur. La base logarithmique choisie dépend des habitudes de la discipline qui les utilisent :

- le logarithme népérien, dont la base est e, facilite certains calculs, mais ne permet pas d'accéder intuitivement à l'ordre de grandeur décimal (*cf exemple 11*).
- le logarithme décimal (base 10) donne directement une notion de l'ordre de grandeur puisque la caractéristique, c'est-à-dire le signe et la partie avant la virgule, le donne directement.
  Par exemple, une échelle, qui va dans la réalité de 10^{-10} à 10^{10}, sera représentée sur un axe allant de -10 à 10. Très utile en astronomie, statistiques, intensité sonore, magnitude d'un séisme, calcul du pH,...

Exemples 12 :

En chimie : On définit l'acidité d'une solution par son potentiel hydrogène (pH) qui dépend de la concentration des ions $\mathrm{H_3O^+}$. Ces concentration étant faibles, on définit :

$$p\mathrm{H} = -\log[\mathrm{H_3O^+}].$$

Conséquence, lorsque la concentration en $[\mathrm{H_3O^+}]$ est multipliée par 10, le pH diminue de 1 :

$$-\log\left(10 \times [\mathrm{H_3O^+}]\right) = -\left(\log(10) + \log[\mathrm{H_3O^+}]\right) = -1 + p\mathrm{H}.$$

De plus $p\mathrm{H} = -\log[\mathrm{H_3O^+}] \iff [\mathrm{H_3O^+}] = 10^{-p\mathrm{H}}$. Donc, une certaine boisson gazeuse de $p\mathrm{H} = 2,6$ contient $10^{-2.6} \simeq 2,5.10^{-3} mol.l^{-1}$ d'ions $[\mathrm{H_3O^+}]$ à peine 3 fois moins qu'une batterie de voiture et environ 25000 fois plus qu'un litre d'eau.

En gros, est à retenir, la baisse d'une unité de pH implique que l'acidité est multipliée par un facteur 10.

Ainsi, une eau de pH 6 est dix fois plus acide qu'une eau de pH 7 ; une eau de pH 5 est 100 fois plus acide qu'une eau de pH 7...[a]

VI. La fonction logarithme décimal

Exemples 12 :

En acoustique : Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I est donnée par la formule :

$$\mathrm{L} = 10\log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right),$$

où $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}\mathrm{W}.m^{-2}$ correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu.

Par exemple le niveau sonore L_2 d'une conversation normale entre deux personnes correspondant à $\mathrm{I} = 10^5\mathrm{I}_0$ est de :

$$\mathrm{L}_2 = 10\log(10)^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels.}$$

Si 2 personnes de plus se joignent à la conversation, le niveau sonore n'est pas multiplié par 2 !!!

En effet, $\mathrm{L}_4 = 10\log(2\times 10^5) = 10\times 5 + 10\log(2) \simeq 53$ décibels.

VI. La fonction logarithme décimal

Exemples 12 :

En acoustique : Le niveau sonore L (en décibels) d'un son d'intensité I est donnée par la formule :

$$\mathrm{L} = 10 \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right),$$

où $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}\mathrm{W}.m^{-2}$ correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu.

Par exemple le niveau sonore L_2 d'une conversation normale entre deux personnes correspondant à $\mathrm{I} = 10^5\mathrm{I}_0$ est de :

$$\mathrm{L}_2 = 10 \log(10)^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels.}$$

Si 2 personnes de plus se joignent à la conversation, le niveau sonore n'est pas multiplié par 2 !!!

En effet, $\mathrm{L}_4 = 10 \log(2 \times 10^5) = 10 \times 5 + 10 \log(2) \simeq 53$ décibels.

En géologie : La magnitude d'une séisme est le logarithme décimal de son amplitude.

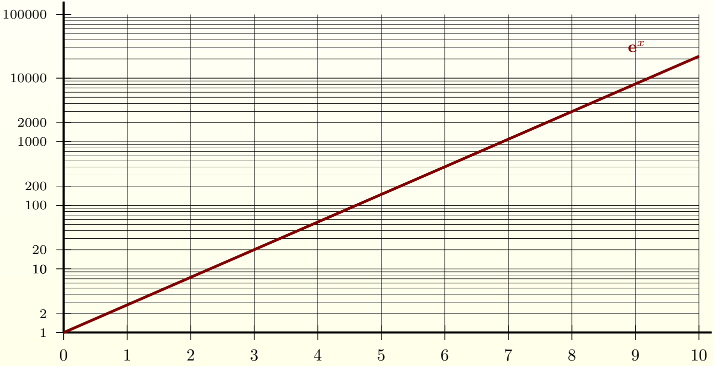
VI. La fonction logarithme décimal

1. Papier semi-logarithmique et logarithmique

- Le papier semi-logarithmique utilise une échelle linéaire sur l'axe des abscisses et une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées. Sur l'axe des ordonnées 10 correspond à 1 unité, 100 à 2 unités, 1 000 à 3 unités,...
  Dans un repère semi-logarithmique, la courbe représentative d'une fonction f à valeurs strictement positives est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_f &= \left\{(x, \log(y)) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x)\right\}\\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \log f(x)\right\}\end{aligned}$$

Sur le papier semi-logarithmique ci-dessous, on a tracé la fonction exponentielle dont la représentation graphique est alors une droite d'équation $y = \log\left(\mathrm{e}^x\right) = \dfrac{1}{\ln(10)}x$.



VI. La fonction logarithme décimal

1. Papier semi-logarithmique et logarithmique

- Le papier logarithmique utilise une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
  Comme $\log(x^n) = n\log(x)$, sur ce papier, les représentations graphiques des fonctions puissances sont des droites d'équation $\mathrm{Y} = n\mathrm{X}$.

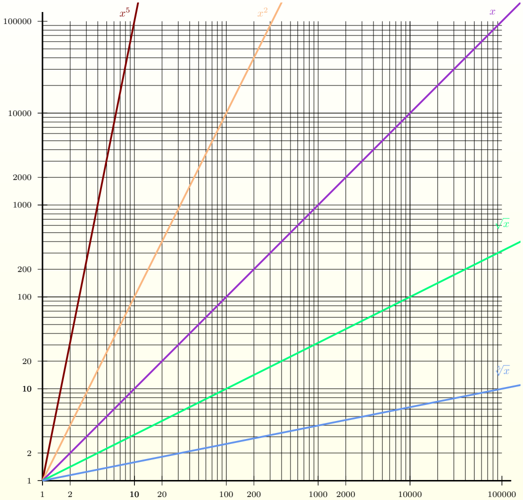


Figure 16 – Repère logarithmique et fonctions puissance.

VII. Les fonctions hyperboliques

VII. Les fonctions hyperboliques

Rappel :

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

VII. Les fonctions hyperboliques

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

- On appelle fonction **cosinus hyperbolique** la partie paire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

- On appelle fonction **sinus hyperbolique** la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

VII. Les fonctions hyperboliques

En particulier et par définition, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x).} \tag{4}$$

De plus, on a l'identité, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{ch}^{\,2}(x) - \mathrm{sh}^{\,2}(x) = 1.}$$

VII. Les fonctions hyperboliques

Exercice 15 :

Résoudre :

1. $\mathrm{ch}\,(x) = 2.$
2. $5\mathrm{ch}\,(x) - 4\mathrm{sh}\,(x) = 3.$
3. $\begin{cases} \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{ch}\,(y) = 4 \\ \mathrm{sh}\,(x) + \mathrm{sh}\,(y) = 1 \end{cases}.$

VII. Les fonctions hyperboliques

Comme ch est strictement positive, la fonction sh sera strictement croissante.

Comme elle s'annule en 0, d'après le théorème de la bijection, elle sera donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ d'où la stricte monotonie de la fonction ch sur ces deux intervalles.

Proposition 25 (Cosinus hyperbolique) :

- $\operatorname{ch}(0) = 1$.
- La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.
- La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} = 0$.

Proposition 26 (Sinus hyperbolique) :

- $\mathrm{sh}\,(0) = 0$.
- La fonction sh est impaire.
- La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x).$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} = 1$.

VII. Les fonctions hyperboliques

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\,(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 17 – Tableaux de variation de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$.

VII. Les fonctions hyperboliques

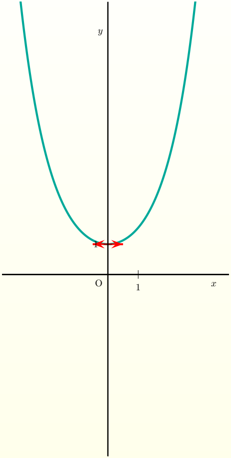


Figure 18 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ et leur tangente en 0.

VII. Les fonctions hyperboliques

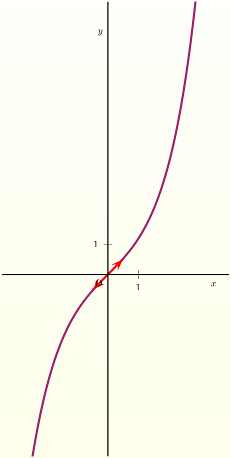


Figure 18 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ et leur tangente en 0.

VII. Les fonctions hyperboliques

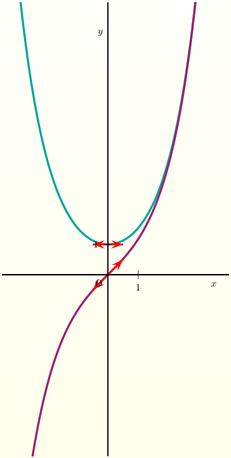


Figure 18 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ et leur tangente en 0.

VII. Les fonctions hyperboliques

On remarquera, en particulier, que :

- Les droites d'équation $y = 1$ et $y = x$ sont respectivement tangentes en 0 aux courbes de ch et sh.

On remarquera, en particulier, que :

- Les droites d'équation $y = 1$ et $y = x$ sont respectivement tangentes en 0 aux courbes de ch et sh.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = 0$ entraîne que les courbes des cosinus et sinus hyperboliques ont même direction asymptotique qui est celle de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

VII. Les fonctions hyperboliques

Exercice 16 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)\cos(x) + \mathrm{sh}\,(x)\sin(x)$.
2. $g : x \longmapsto \mathrm{ch}^{\,4}(x)\mathrm{sh}^{\,2}(x)$.

VIII. Tableau récapitulatif

VIII. Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Domaine de définition</th><th>Domaine de dérivabilité</th><th>$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>$c \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>nx^{n-1}</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in]1\,;+\infty[$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}_+$</td><td rowspan="3">$\alpha x^{\alpha-1}$</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in]0\,;1[$</td><td>$\mathbb{R}_+$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
</table>

VIII. Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Domaine de définition</th><th>Domaine de dérivabilité</th><th>$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>$\ln(x)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\mathbb{R}_+^*$</td><td>$\dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>$\log_a(x)$</td><td>$\dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td colspan="2" rowspan="4">$\mathbb{R}$</td><td>e^x</td></tr>
<tr><td>$a^x,\ 0 < a$</td><td>$\ln(a) \times a^x$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{ch}\,(x)$</td><td>$\mathrm{sh}\,(x)$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{sh}\,(x)$</td><td>$\mathrm{ch}\,(x)$</td></tr>
</table>