Ensembles

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Février 2024

Sommaire I

I. Notions sur les ensembles

I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 1 :

On appelle **ensemble** toute collection d'objets, appelés ses **éléments**, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x **appartient** à E » et se note $x \in \mathrm{E}$.
  Dans le cas contraire, on écrira $x \notin \mathrm{E}$ et on lira « x n'appartient pas à E ».
- Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera $\varnothing$.

Un ensemble à un seul élément est appelé un **singleton**, noté avec des { }, un ensemble à deux éléments, une **paire**. Il n'y pas d'ordre dans l'écriture.

ATTENTION

L'ensemble $\{\varnothing\}$ N'EST PAS VIDE ! il a un élément qui est l'ensemble vide contrairement à l'ensemble $\varnothing$ qui n'a pas d'éléments.

I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exemples 1 :

- Les faces d'un dé :
  $\mathrm{F} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.
- Les couleurs d'un jeu de 32 cartes : $\mathcal{C} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des **entiers naturels**, l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}.$$

- On appelle ensemble des **entiers relatifs**, l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leur opposé :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- On appelle **nombre décimal**, un nombre admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, *i.e.* un nombre de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} \,/\, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Remarque : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{a}{2^p 5^q} \,/\, a \in \mathbb{Z}, (p\,;q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle nombre rationnel un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, (p\,;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des nombres réels, l'ensemble $\mathbb{R}$ dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.
- On appelle ensemble des nombres complexes, l'ensemble $\mathbb{C}$ des couples de réels muni d'une multiplication particulière :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + \mathrm{i}\, b \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ et } \ \mathrm{i}^2 = -1 \right\}.$$

On peut définir des ensembles par :

1. **Extension :**
   $\mathrm{E} = \{1;\, 8;\, 6;\, 2\} = \{1;\, 1;\, 1;\, 8;\, 6;\, 6;\, 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).
   $\mathrm{I} = \{1;\, 3;\, 5;\, 7,\, 9\}$: l'ensemble des dix premiers nombres impairs.
   $\mathrm{B} = \{valet;\, dame;\, roi\}$: l'ensemble des figures d'une jeu de cartes.
   $\mathrm{D} = \{1;\, 2;\, 8;\, 16, ...\} = \left\{2^i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$: l'ensemble des puissances de 2.
   Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.

On peut définir des ensembles par :

2. **Compréhension :**
$\mathrm{I} = \{p \in \mathbb{N} \,/\, p \text{ est impair}\} = \{2k+1 \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ *i.e.* la donnée d'une propriété $\mathcal{P}$ caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros, ici $\mathbb{N}$).
Étant donné un ensemble E et une propriété $\mathcal{P}$, on définit F comme sous-ensemble de E :
$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} \,/\, \mathcal{P}(x)\}.$$
Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\; x \in \mathrm{F} \iff \mathcal{P}(x).}$

Exemple 2 :

L'ensemble des naturels pairs peut être défini par extension $\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8, \ldots\}$ et par compréhension $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists p \in \mathbb{N},\; n = 2p\}$.

Exercice 1 :

Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

1. l'ensemble des naturels impairs,
2. la courbe d'une fonction f (ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ du plan $(\mathcal{P})$ vérifiant $y = f\,(x)$),
3. la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.

I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

On peut définir des ensembles par :

3. **Induction structurelle :**
C'est se donner un certain nombre d'éléments de E, et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 :

L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E, pq est dans E.

4. **Construction :** Unions, intersections d'ensembles. Nous reverrons ce principe.

Exemple 4 :

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{D}_a$ l'ensemble des diviseurs de a.

Alors, pour tous entiers a et b, $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b.

Définition 3 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Un ensemble A est dit inclus dans un ensemble B, noté $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, si tout élément de A est aussi un élément de B.

On dit aussi que A est un sous-ensemble de B ou une partie de B.

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \forall x \in \mathrm{A},\ x \in \mathrm{B}.$$

Exemple 5 :

$\{-2, 5\} \subset \mathbb{Z}$ et $\{1, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$.

Remarque : La notion de singleton nous donne un lien entre appartenance et inclusion :

Soit E un ensemble et a un objet. Alors : $\boxed{a \in \mathrm{E} \iff \{a\} \subset \mathrm{E}.}$

ATTENTION

Au bon usage des symboles $\in$ et $\subset$:

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in \mathrm{E}$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $\mathrm{F} \notin \mathrm{E}$.
- ET un élément n'est pas inclut dans un ensemble : $x \not\subset \mathrm{E}$.

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\varnothing \subset \mathrm{A}$.
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$ (et A=A !).
- $\left(\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B} \subset \mathrm{C}\right) \implies \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$. On dit que l'inclusion est transitive.

Exercice 2 :

Compléter les propositions suivantes avec le symbole $\in$ ou $\subset$.

1. $\varnothing \ldots \{1, 2, 3, 4\}$
2. $1 \ldots \{1, 2, 3, 4\}$
3. $\{1\} \ldots \{1, 2, 3, 4\}$

I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Proposition 1 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \Big(\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}\,(x) \implies \mathscr{Q}\,(x)\Big).$$

Méthode 1 :

[Montrer $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$]

- On considère un élément quelconque de A, par exemple, vérifiant une certaine propriété $\mathscr{P}$ et on montre qu'il appartient à B, par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété $\mathscr{Q}$.

  ou
- On considère un élément n'appartenant pas à B et on montre qu'il ne peut

Définition 4 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On dit que les ensembles A et B sont égaux, noté $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, s'ils ont exactement les mêmes éléments.

L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{B} &\iff (\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B} \subset \mathrm{A}) \\ &\iff (\forall\, x,\ x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}). \end{aligned}$$

Méthode 2 :

[Égalité de deux ensembles] Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procèdera donc par double inclusion ou directement par équivalence.

Exercice 4 :

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \notin \mathrm{B} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \in \overline{\mathrm{B}}$.
- $\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \iff \mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ ou $\mathrm{B} \not\subset \mathrm{A} \iff \exists x \in \mathrm{A} \,/\, x \notin \mathrm{B}$ ou $\exists x \in \mathrm{B} \,/\, x \notin \mathrm{A}$.

Exemple 6 :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Proposition 3 :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

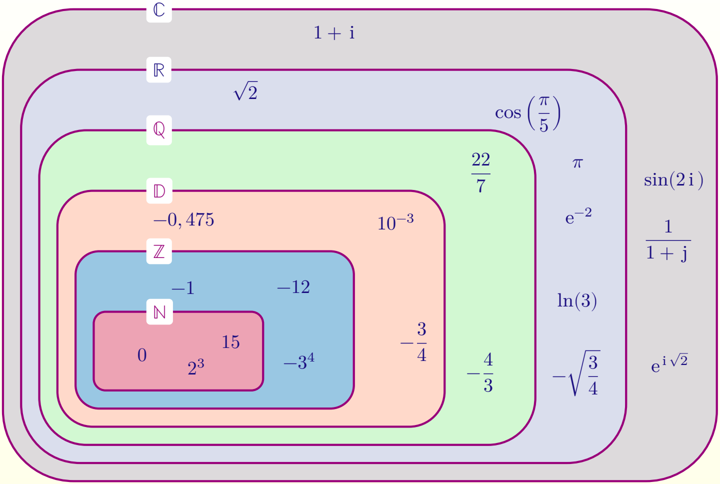


Figure 1 – Les ensembles de nombres usuels

Exercice 5 (Vrai ou Faux ?) :

1. La somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Le produit de deux rationnels est un rationnel.
3. La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
4. Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
5. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Définition 5 :

Si A est inclus dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E.

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

On a donc l'équivalence importante :

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{E}.}$$

Il contient en particulier la partie vide $\varnothing$ et la partie pleine E donc $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites propres ou strictes.

ATTENTION

Si A est un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dont l'appartenance est notée avec le symbole $\in$, A est un sous-ensemble de E marqué par le symbole $\subset$.

I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Exemples 7 :

- $\mathcal{P}\left(\varnothing\right) = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}\left(\{a\}\right) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}\left(\{a, b\}\right) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Exercice 6 :

Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathcal{P}([a\,;b])$.

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E, on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E, notés par des petites lettres x, y, a,...
- celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, notées par des majuscules droites : $\mathrm{A} = \{x, y\}$, ...
- celui des ensembles de parties de E, inclus dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E}))$, notés par des majuscules cursives : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, ...

II. Ensembles et fonctions

Définition 6 (Ensemble de définition, image et antécédents) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

L'ensemble E est appelé l'**ensemble de définition** de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in \mathrm{E}$ est appelé une valeur de f.

Pour tous $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$, si $y = f(x)$, on dit que y est L'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.

On dira souvent que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est à valeurs dans F mais sans suggérer que tous les éléments de F sont atteints.

Définition 7 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E.

On appelle image (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F} \,/\, \exists\, x_y \in \mathrm{A},\ f(x_y) = y\} \subset \mathrm{F}.$$

Si $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, on dit que A est stable par f.

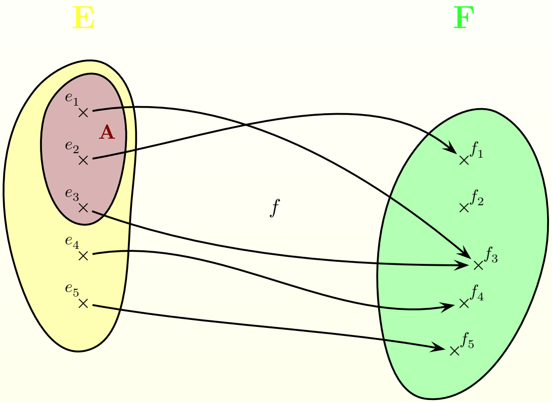


Figure 2 – Image directe d'une partie par une application

$$f(\mathrm{A}) = \{f_1,\, f_3\}.$$

Remarque : On parle ici de diagramme sagittal.

Vocabulaire Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On appelle ensemble image de f, noté imf ou $f(\mathrm{E})$, l'ensemble de toutes les images de E par f.

C'est donc une partie de F et plus précisément c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E *i.e.*

$$imf = f(\mathrm{E}) = \left\{y \in \mathrm{F} \;/\; \exists\, x \in \mathrm{E}, y = f(x)\right\}.$$

On fera attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$.

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction cos est $[-1\,;1]$.
- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $[1\,;+\infty[$.
  Celle de $\mathbb{R}_-$ est $]0\,;1]$.
- Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$ alors $f(\,]-3\,;2[\,) = [0\,;9[$. L'intervalle $[-1\,;1]$ est stable par f. $[-1\,;0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction sin :
  - l'image de $[0\,;\pi]$ est $[0\,;1]$,
  - l'image de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ est $[-1\,;1]$,
  - et l'image de $[0\,;2\pi]$ est aussi $[-1\,;1]$.
  - l'image de $\pi\mathbb{Z}$ est $\{0\}$.
- Plus généralement, pour déterminer l'ensemble image d'une fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on étudie les variations de f.

ATTENTION

sin est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1\,;1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}$ voire $\mathbb{R}_+$ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.

D'une manière générale, $f(\mathrm{E}) \neq \mathrm{F}$.

Exercice 7 :

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos x \end{array}$ Déterminer :

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f\left(\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $f([0\,;\pi[)$.

Définition 8 (Surjection) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

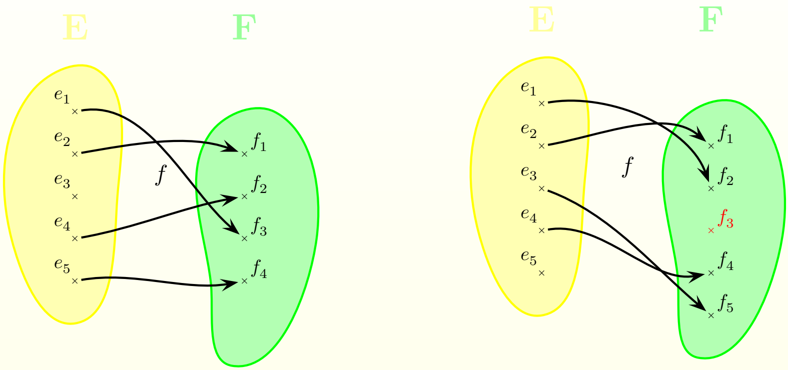
On dit que f est une surjection ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

Ceci revient à dire que pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E, ou encore

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists\, x \in \mathrm{E} \,/\, y = f(x).$$

Et d'une manière générale très importante :

$$\boxed{f \text{ est surjective de E dans F} \iff im f = \mathrm{F} \iff f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}.}$$



f surjective

f non surjective

Figure 3 – Diagramme sagittal d'une fonction surjective.

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_{E} est surjective sur E.
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est une application, alors f induit une surjection entre E et imf qui est l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \twoheadrightarrow & imf \\ x & & g(x) = f(x). \end{array}$$

  Toute « corestriction» d'une application à son ensemble image est donc surjective.

- La projection $p_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ (x\,;y) & & x \end{array}$ est surjective.

Méthode 3 :

[Montrer qu'une fonction est surjective] Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une fonction entre deux ensembles E et F.

Pour montrer que f est surjective de E sur F, on considère un élément $y \in \mathrm{F}$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in \mathrm{E}$ de y par f.

Exercice 8 :

Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

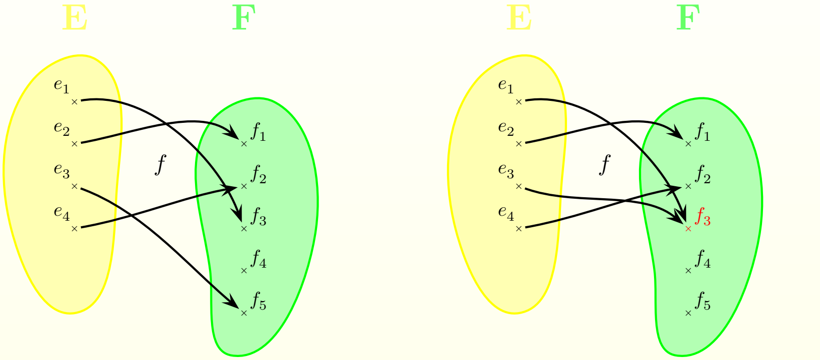
1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ x & & x^2 \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & 2x \end{array}$
4. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{N} \\ n & & 2n \end{array}$

Définition 9 (Injection) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

On dit que f est une **injection** (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.

Ceci revient à dire que pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E.



f injective

f non injective

Figure 4 – Diagramme sagittal d'une fonction injective.

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_{E} est injective.
- Soit A une partie non vide de E, l'application $i: \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ x & & x \end{array}$ est injective d'où son nom d'injection canonique de A dans E.
- La fonction ln est une injection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de même que sa fonction réciproque exp qui l'est de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ n'est pas une injection de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 :

$f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2,\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier» en cours de calcul *i.e.* si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ après « simplification».
La fonction f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents et, en particulier,

Corollaire 4.1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

Exemple 11 :

La fonction $x \longmapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Méthode 4 :

[Montrer qu'une fonction est injective] Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une fonction entre deux ensembles E et F.

Pour montrer que f est injective sur E, on considère deux éléments x et y de E tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.

Exercice 9 :

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

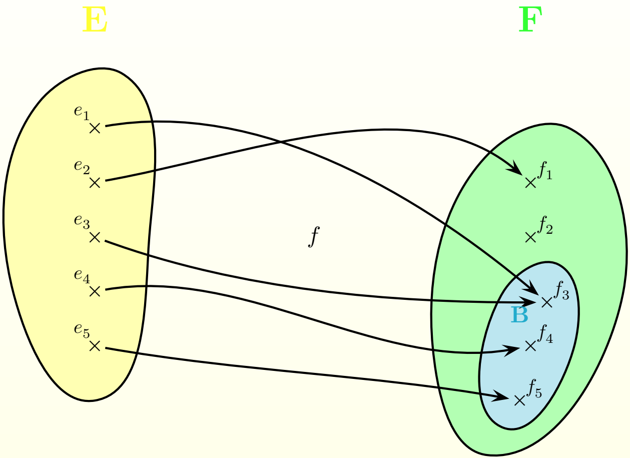
1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$
3. $k : \begin{array}{ccc}]-\pi ; 0] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos(x) \end{array}$

Définition 10 :

Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par f l'ensemble des antécédents de B :

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} \,/\, f(x) \in \mathrm{B}\} \subset \mathrm{E}.$$



$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}.$$

Figure 5 – Image réciproque d'une partie par une application

Exemple 12 :

Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$ alors $f^{-1}(\,]1\,;3]\,) = \left[-\sqrt{3}\,;-1\right[\cup \left]1\,;\sqrt{3}\right]$.

ATTENTION

La notation f^{-1} peut porter à confusion avec la fonction réciproque d'une fonction bijective f. On ne suppose nullement ici que f est bijective dans la définition de $f^{-1}(\mathrm{B})$ mais lorsque f le sera on pourra ultérieurement vérifier que l'image réciproque de B par f correspond à l'image directe de B par f^{-1}.

Exercice 10 :

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \cos x \end{array}$

Déterminer :

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f\left(\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.
3. $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4. $f^{-1}(\{1\})$.
5. $f^{-1}(\,]-1\,;2]\,)$.
6. $f^{-1}(\,[0\,;\pi]\,)$.
7. $f\,(f^{-1}(\,[0\,;1]\,))$.
8. $f^{-1}\left(f\left(\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\right)$.

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toutes parties A et B de E, on a :

1. $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$.
2. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{B})$.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toute parties A et B de F, on a :

1. $f(f^{-1}(\mathrm{B})) \subset \mathrm{B}$.
2. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f^{-1}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.

III. Opérations sur les ensembles

III. Opérations sur les ensembles

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E.

Définition II :

Le complémentaire d'un ensemble A (dans E), noté $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

$$\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\backslash\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \;/\; x \notin \mathrm{A}\}$$

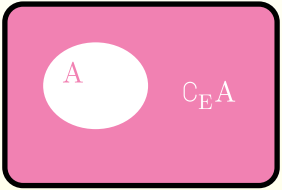


Figure 6 – Complémentaire d'une partie.

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\ x \in \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A} \iff x \notin \mathrm{A}.}$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

Exercice 11 :

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On considère $A = \{1, 2\}$. Déterminer $\complement_E A$ et $\complement_F A$.

Proposition 7 :

- $\complement_E E = \varnothing$.
- $\complement_E \varnothing = E$.
- $\forall\, A \subset E,\ \complement_E(\complement_E A) = A$.

La dernière propriété se dit, que la complémentarisation est une opération involutive.

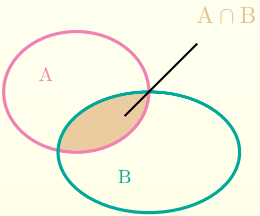
Définition 12 :

L'intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \ \text{ et } x \in B\}.$$

Par conséquent, $\boxed{\forall x \in E,\ x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).}$

L'intersection est aux ensembles ce que la conjonction est aux propriétés.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples 13 :

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \cap \{1,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 4\}$ et $[1\,;3] \cap]2\,;4] =]2\,;3]$.

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \varnothing = \varnothing$. ($\varnothing$ est absorbant pour $\cap$)
- $A \cap E = A$. (E est élément neutre pour $\cap$)
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$. (A et $\overline{A}$ sont disjoints dans E)

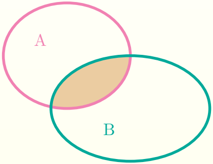
Définition 13 (Ensembles disjoints) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

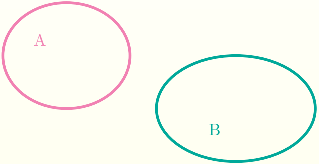
- On dit que A et B sont **disjoints** ou incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- On dit que A et B sont **distincts** lorsqu'ils ne sont pas égaux.

Comme on l'a vu, un sous-ensemble et son complémentaire dans E sont toujours disjoints.

Remarque : $\varnothing$ est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! À part ça, disjoint implique distinct.



A et B ne sont pas disjoints



A et B sont disjoints

A et B sont distincts.

Figure 8 – Ensembles disjoints et distincts.

Proposition 9 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E.

$$\text{A et B sont disjoints} \iff \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \iff \mathrm{A} \subset \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{B} \iff \mathrm{B} \subset \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}.$$

$$\begin{aligned}\text{A et B sont distincts} &\iff \mathrm{A} \not\subset \mathrm{B} \text{ ou } \mathrm{B} \not\subset \mathrm{A} \\ &\iff \text{il existe un élément appartenant à l'un des} \\ &\quad\ \text{ensembles et pas à l'autre.}\end{aligned}$$

Théorème 10 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toute parties A et B de E, on a :

1. $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
2. $f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B})$.

Contre-Exemple 14 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 \end{array}$.

Alors $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \neq f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.

Définition 14 :

La réunion de deux ensembles A et B, noté $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} \;/\; x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}.$$

Par conséquent, $\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\ x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A}) \vee (x \in \mathrm{B}).}$

La réunion est aux ensembles ce que la disjonction est aux propriétés.

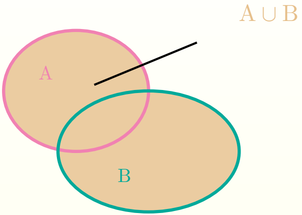


Figure 9 – Réunion d'ensembles.

Proposition 11 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- $A \cup \varnothing = A$. ($\varnothing$ est neutre pour $\cup$)
- $A \cup E = E$. (E est élément absorbant pour $\cup$)
- $A \cup \overline{A} = E$. (A et $\overline{A}$ recouvrent E)

Exercice 12 :

1. Simplifier $[1\,;3] \cup]2\,;4]$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-4x+3} \geqslant 0$.

III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toute parties A et B de E, on a :

1. $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
2. $f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B})$.

Proposition 13 (Propriétés algébriques de $\cap$ et $\cup$) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Associativité

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Proposition 13 (Propriétés algébriques de $\cap$ et $\cup$) :

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sous-ensemble

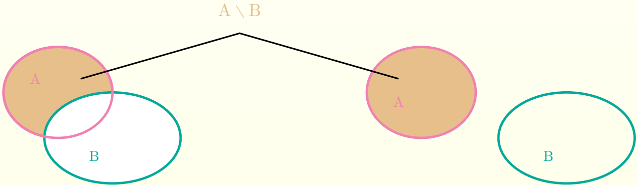
- $\complement_E(E) = \varnothing$ et $\complement_E(\varnothing) = E$
- $\complement_E \complement_E A = A$ et $A \cup \complement_E A = E$.
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
  $\iff \complement_E B \subset \complement_E A$.

L'équivalence $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ est aux ensembles ce qu'est aux propriétés l'équivalence entre une propriété et sa contraposée.

Définition 15 :

La **différence** des ensembles A et B, notée $A \backslash B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B.

$$A \backslash B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B.$$



A et B sont ne sont pas disjoints

A et B sont sont disjoints

Figure 10 – Différence de deux ensembles.

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty\,;0[$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes non réels.
  Cet ensemble contient strictement l'ensemble des imaginaires purs non nuls $\mathrm{i}\,\mathbb{R}^*$.

Il faut bien garder en tête la correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques :

Résumé et analogie :

$$
\begin{array}{ccccc}
\cup & \equiv & \vee & \qquad & x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A}) \vee (x \in \mathrm{B}) \\
\cap & \equiv & \wedge & \qquad & x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A}) \wedge (x \in \mathrm{B}) \\
\complement & \equiv & \rceil & \qquad & x \in \complement \mathrm{B} \iff \rceil (x \in \mathrm{B}) \\
\subset & \equiv & \Longrightarrow & \qquad & \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A} \implies x \in \mathrm{B}) \\
= & \equiv & \Longleftrightarrow & \qquad & \mathrm{A} = \mathrm{B} \iff (x \in \mathrm{A} \iff x \in \mathrm{B})
\end{array}
$$

IV. Famille d'ensembles

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, indexée par un ensemble I quelconque.

- La réunion des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists i_x \in I,\ x \in A_{i_x}\}.$$

- L'intersection des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall\, i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Remarque : L'existence de tels ensembles est un axiome de la théorie des ensembles.

Exemples 16 :

- $\mathrm{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0\,;1]) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi\,;(2n+1)\pi].$

On montrera plus tard que :

- $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0\,;1].$
- $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}, 1\right] = [0\,;1].$
- $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} \left[1-\frac{1}{n}, 1\right] = \{1\}.$

Un certain nombre de propriétés vues dans les paragraphe précédents se généralisent aux unions et intersections quelconques :

Proposition 14 :

Étant donné $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E.

Distributivité :

- $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$.
- $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$.

Lois de Morgan :

- $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (\complement_E A_i)$.
- $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\complement_E A_i)$.

Exercice 13 :

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Soit f une application de E vers F.

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)$ et $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)$ et $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.

Moralité : Les assertions du théorème (12) et du théorème (10) se généralisent à une famille quelconques de parties de E.

Proposition 15 :

Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

Pour tout y de F, les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints et $\displaystyle\bigcup_{y \in \mathrm{F}} f^{-1}(\{y\}) = \mathrm{E}$.

IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $\left(\mathrm{A}_i\right)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E.

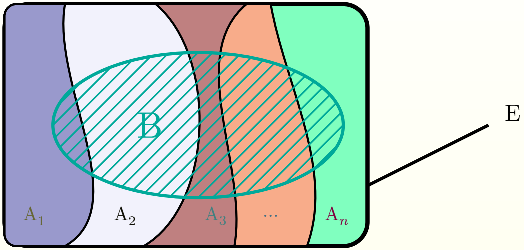
On dit que la famille $\left(\mathrm{A}_i\right)_{i\in\mathrm{I}}$ forme une partition de E si :

- $\forall\, i \in \mathrm{I},\ \mathrm{A}_i \neq \varnothing$,
- $\forall\, (i\,;j) \in \mathrm{I}^2,\ i \neq j \implies \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$,
- et $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$.

Les sous-ensembles A_i s'appellent les composantes de la partition.

Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.

On note $\mathrm{E} = \displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ pour signifier la réunion disjointe.



$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure 11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.

Remarque : Des ensembles d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ tels que $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$ sont dits deux à deux disjoints.

On a alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \varnothing$ mais la réciproque est fausse.

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E. D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
  Donc, A et $\overline{A}$ forment une partition de E.
- Soit $f : E \longmapsto F$ une application.
  D'après la proposition (15) , si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y \in F}$ forme une partition de E.
- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \sqcup \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de $\mathbb{R}$.
- Si $E \neq \varnothing$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.
- La famille d'intervalles $\big\{ [n\,;n+1[\big\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 14 :

Soit $\mathrm{E} = \{a\, b,\ c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

1. $\{\varnothing,\ \{a,\ c\},\ \{b\}\}$
2. $\{\{a,\ b\},\ \{b,\ c\}\}$
3. $\{\{a\},\ \{c\}\}$
4. $\{\{a\},\ \{b,\ c\}\}$

Exercice 15 :

Quelles partitions pourrait-on envisager pour l'ensemble $\mathrm{E} = [a\,;b]$?

V. Produit cartésien

V. Produit cartésien

Définition 18 (Produit cartésien) :

Étant donnés n ensembles E_1, ..., E_n.

On appelle **produit cartésien** des ensembles E_1, ..., E_n, noté $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ $\left(\text{ou } \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i\right)$, l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ dont la i-ème coordonnée est un élément de E_i.

$$\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \ / \ \forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ x_i \in \mathrm{E}_i \right\}.$$

V. Produit cartésien

On note $\mathrm{E}^2 = \mathrm{E} \times \mathrm{E}$, et plus généralement $\mathrm{E}^n = \overbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E}}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 :

$\mathbb{R}^n = \{(x_1 ; \ldots ; x_n) \;/\; \forall\, i \in [\![1 ; n]\!]\,,\; x_i \in \mathbb{R}\}$.

D'un point de vue formel, on a donc l'équivalence :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E},\, \forall\, y \in \mathrm{F} \iff \forall\ (x ; y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}.}$$

V. Produit cartésien

ATTENTION

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

- $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel
  - l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_n, \dots, x_1\},$$

  - le nombre d'apparitions des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1, x_1, \dots, x_n\}.$$

V. Produit cartésien

Exemples 19 :

- $(1\,;2)$ est un couple différent de $(2\,;1)$. L'ensemble $\{1,\ 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2,\ 1\}$.
- $(1\,;1)$ est un couple et $\{1,\ 1\} = \{1\}$ un singleton.
- Pour $\mathrm{A} = \{a;\ b\}$ et $\mathrm{B} = \{1;\ 2;\ 3\}$, on a :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \big\{\,(a\,;1)\,;\,(a\,;2)\,;\,(a\,;3)\,;\,(b\,;1)\,;\,(b\,;2)\,;\,(b\,;3)\,\big\}.$$

$\mathrm{A} \times \mathrm{B}$	1	2	3
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	$(a\,;3)$
b	$(b\,;1)$	$(b\,;2)$	$(b\,;3)$

V. Produit cartésien

Remarque : Dans le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B, pour chaque élément a de A, on dispose d'une copie complète de B, identifiée au produit $\{a\} \times B$, c'est-à-dire à l'ensemble des couples $(a\,;b)$, pour b parcourant B.

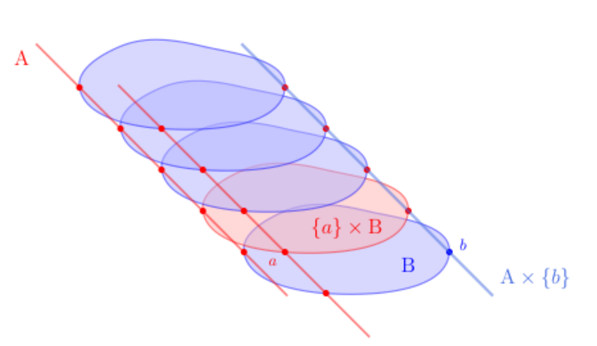


Figure 12 – Sections de $A \times B$.

V. Produit cartésien

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x\,;y)$ est noté $\mathbb{R}^2$. On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x\,;y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x\,;y)$.
- $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p\,;q)$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
- Le cercle trigonométrique $\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2=1\right\}$ n'est pas un produit cartésien. Il ne peut pas s'écrire sous la forme $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ où A, B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Proposition 16 :

Soit E, E′ et F des ensembles.

Alors :

- $E \times F = \varnothing \iff (E = \varnothing) \vee (F = \varnothing)$
- $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$.
- $(E \cap E') \times F = (E \times F) \cap (E' \times F)$.

ATTENTION

En général, $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

Dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, $([0\,;1] \times [0\,;1]) \cup ([-1\,;0] \times [-1\,;0])$ est différent de l'ensemble $[-1\,;1] \times [-1\,;1]$.

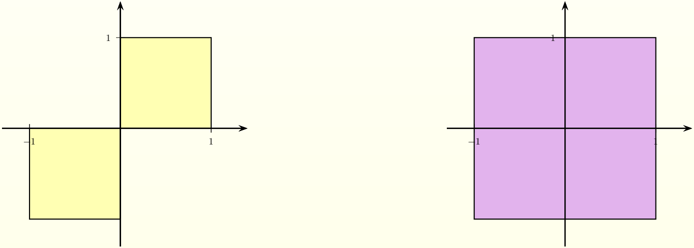


Figure 13 – $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

V. Produit cartésien

Exemples 21 :

- $\{1\} \times \{1,2\} \times \{1,2,3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1\,;1\,;1)\,;\,(1\,;1\,;2)\,;\,(1\,;1\,;3)\,; \\ (1\,;2\,;1)\,;\,(1\,;2\,;2)\,;\,(1\,;2\,;3) \end{array} \right\}.$
- Hachurer dans le plan $\Big([0,1] \cup [2,3]\Big) \times [0,3]$.