

# Applications

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Mars 2024



# Sommaire I

- 1 Le contexte
  - Relation binaire
  - Relation d'équivalence
  - Relation d'ordre
- 2 Applications
  - Fonctions et Applications
  - Zoologie
  - Opérations algébriques
  - Composition
- 3 Aspects qualitatifs
  - Graphe d'une fonction
  - De l'intérêt des fonctions de référence
  - Parité, imparité et symétrie
- 4 Fonctions et relation d'ordre
  - Fonctions monotones
  - Fonctions majorées, minorées, bornées, ...
  - Extrema



## Sommaire II

- 5 Dérivation
  - Taux d'accroissement et nombre dérivé
  - Opérations algébriques et dérivation
  - Composition et dérivation
  - Monotonie et dérivation
- 6 Continuité
  - Fonction continue
  - Opérations algébriques et continuité
  - Théorème des valeurs intermédiaires
- 7 Injection, Surjection et Bijection
  - Injection
  - Surjection
  - Bijection
- 8 Réciproque
  - Bijection réciproque
  - Courbe représentative
  - Dérivabilité et Continuité



# I. Le contexte

- 1 Le contexte
  - Relation binaire
  - Relation d'équivalence
  - Relation d'ordre
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire entre  $E$  et  $F$**  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

Dans la pratique, on s'intéressera plutôt aux relations d'un ensemble  $E$  dans lui-même.



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire** entre  $E$  et  $F$  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

### Exemples 1 :

- 1 L'égalité sur  $E = \{1, 2, 3\}$  est une relation binaire. Son graphe est  $\mathcal{G} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ .

=	1	2	3
1	(1, 1)		
2		(2, 2)	
3			(3, 3)

# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire entre  $E$  et  $F$**  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

### Exemples 1 :

- La relation  $\leq$  sur  $E = \{1, 2, 3\}$  est une relation binaire.

$\leq$	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2		(2, 2)	(2, 3)
3			(3, 3)



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire entre  $E$  et  $F$**  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

### Exemples 1 :

- ⑧ La relation  $<$  sur  $E = \{1, 2, 3\}$  est une relation binaire.

$<$	1	2	3
1		(1, 2)	(1, 3)
2			(2, 3)
3			



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire entre  $E$  et  $F$**  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

### Exemples 1 :

- La relation  $\mathcal{R}$  définie par  $x\mathcal{R}y \iff 3$  divise  $y - x$  est une relation binaire sur  $E = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ .

$\mathcal{R}$	0	1	2	3	5
0	(0, 0)			(0, 3)	
1		(1, 1)			
2			(2, 2)		(2, 5)
3	(3, 0)			(3, 3)	
5			(5, 2)		(5, 5)

# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Définition 1 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

On appelle **relation binaire entre  $E$  et  $F$**  un triplet  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$ , appelée **graphe** de la relation binaire.

$$(x; y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \iff (x; y) \in \mathcal{G}.$$

### Exemples 1 :

- ④ La relation  $\subset$  est une relation binaire sur  $\mathcal{P}(E)$ .
- ④ Dans le plan, les relations  $\parallel$  et  $\perp$  sont des relations binaires de l'ensemble des droites, la colinéarité sur l'ensemble des vecteurs,...



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Proposition 1 :

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'un ensemble  $E$  vers lui-même.

On dit que  $\mathcal{R}$  est :

- Réflexive lorsque tout élément est en relation avec lui-même :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

- Symétrique lorsque le graphe de  $\mathcal{R}$  est symétrique :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x.$$

- Antisymétrique lorsque :

$$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

- Transitive lorsque :

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

### Exemples 2 :

Sur les ensembles adéquats :

- La relation  $=$  est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- La relation  $\leq$  est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation  $<$  est seulement transitive.
- La relation  $\mathcal{R}$  définie par  $x\mathcal{R}y$  si, et seulement si 3 divise  $y - x$  est réflexive, symétrique et transitive. C'est l'égalité modulo 3.
- La relation  $\subset$  est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation  $//$  est réflexive, symétrique et transitive.
- La relation  $\perp$  est symétrique.
- La colinéarité est réflexive, symétrique et transitive.



# I. Le contexte

## 1. Relation binaire

Les relations d'égalité, de parallélismes, d'équivalence, de colinéarité de vecteurs non nuls sont toutes des relations réflexives, symétriques et transitives dans leur ensemble respectif.

De même, les relations de comparaison large et d'inclusion sont toutes deux réflexives, anti-symétriques et transitives.



# I. Le contexte

## 2. Relation d'équivalence

### Définition 2 :

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation de  $E$  dans  $E$ .

On dit que  $\mathcal{R}$  est une **relation d'équivalence** lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

### Exercice 1 :

On définit sur  $\mathbb{C}$  une relation binaire en posant

$$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, \quad (z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|).$$

- 1 Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{C}$ .
- 2 Soit  $z \in \mathbb{C}$ , déterminer l'ensemble des éléments en relation avec  $z$  ce que l'on appelle sa **classe** d'équivalence.



# I. Le contexte

## 2. Relation d'équivalence

### Exemples 3 :

- La relation définie dans  $\mathbb{R}$ , par  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ , est une relation d'équivalence.

Cette relation est appelée la congruence modulo  $2\pi$  dans  $\mathbb{R}$ , et on note

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi.$$

Les **représentants** de chaque classe dans l'intervalle  $]\pi; \pi]$  s'appelle la **mesure principale** de l'angle considéré :  $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

- Dans  $\mathbb{Q}$ , la relation  $\simeq$  définie par  $\forall \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2, \frac{a}{b} \simeq \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$  est une relation d'équivalence dont les représentants des (nombreuses) classes sont les fractions irréductibles :  $3 \times 35 = 7 \times 15 \iff \frac{3}{7} \simeq \frac{15}{35}$ .



# I. Le contexte

## 2. Relation d'équivalence

**Vocabulaire** : Soit  $E$  un ensemble non vide. On appelle classe d'équivalence d'un élément  $x \in E$ , l'ensemble des éléments en relation avec lui.

- Les **classes d'équivalence** sont des parties de  $E$  non vides et deux à deux disjointes.
- La réunion des classes d'équivalence est égale à  $E$ .

Les classes d'équivalence forment donc une **partition** de  $E$ .





# I. Le contexte

## 3. Relation d'ordre

### Définition 3 :

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation de  $E$  dans  $E$ .

On dit que  $\mathcal{R}$  est une **relation d'ordre** lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- On dit alors que  $(E, \mathcal{R})$  est un ensemble **ordonné**.
- Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits **composables** pour l'ordre  $\mathcal{R}$  lorsque l'on a  $x\mathcal{R}y$  ou bien  $y\mathcal{R}x$ .
- Lorsque tous les éléments de  $E$  sont comparables deux à deux, on dit que l'ordre  $\mathcal{R}$  est **total** et que  $(E, \mathcal{R})$  est un ensemble **totalelement ordonné**, partiel dans l'autre cas.



# I. Le contexte

## 3. Relation d'ordre

Exemples 4 :

- L'ordre naturel sur les réels est une relation d'ordre total.
- Soit  $E$  un ensemble,  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  est un ensemble partiellement ordonné.
- Soit  $I$  un ensemble non vide, on pose  $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $I$  et à valeurs réelles et on la relation  $\mathcal{R}$  :

$$\forall f, g \in E, f \mathcal{R} g \iff \forall x \in I, f(x) \leq g(x).$$

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre partiel appelée ordre fonctionnel.

**ATTENTION**

La négation de  $x \leq y$  est :

$x$  et  $y$  ne sont pas comparables OU  $x$  et  $y$  sont comparables  
et  $x > y$ .



# I. Le contexte

## 3. Relation d'ordre

### Exercice 2 :

On munit  $\mathbb{R}^2$  de la relation notée  $\prec$  définie par

$$(x, y) \prec (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

- 1 Démontrer que  $\prec$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ . L'ordre est-il total ?
- 2 Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ?



# I. Le contexte

## 3. Relation d'ordre

### Définition 4 (Parties bornées) :

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ .

On dit que :

- $A$  est **majorée** dans  $E$  lorsque :  $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$ .
- $A$  est **minorée** dans  $E$  lorsque :  $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x$ .
- $A$  est **bornée** dans  $E$  lorsque  $A$  est à la fois majorée et minorée.
  
- $A$  admet un **maximum** lorsque :  $\exists b \in A, \forall x \in A, x \leq b$ .
- $A$  admet un **minimum** lorsque :  $\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$ .

**ATTENTION**

- Une partie d'un ensemble ordonné n'est pas forcément majorée (ou minorée), par exemple  $\mathbb{N}$  est non majoré dans  $\mathbb{R}$ .
- Les majorants et minorants ne sont pas uniques.
- Les majorants et minorants n'appartiennent pas forcément à l'ensemble mais quand ils le sont, ce sont des maxima et minima réciproquement.



# I. Le contexte

## 3. Relation d'ordre

### Proposition 2 (Unicité des extrema) :

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $E$ .

- Si  $A$  est **majorée** par un majorant  $\beta$  qui est dans  $A$  alors celui-ci est unique. On l'appelle LE maximum de  $A$  et on note  $\beta = \max(A)$ .
- Si  $A$  est **minorée** par un minorant  $\alpha$  qui est dans  $A$  alors celui-ci est unique. On l'appelle LE minimum de  $A$  et on note  $\alpha = \min(A)$ .

Les maxima et minima n'existent pas forcément même pour une partie bornée mais, s'ils existent, ils sont uniques. C'est ce qui justifie les notation  $\max(A)$  et  $\min(A)$ .



## II. Applications

- 1 Le contexte
- 2 Applications**
  - Fonctions et Applications
  - Zoologie
  - Opérations algébriques
  - Composition
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque



## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

La notion d'**application** (ou fonction) entre deux ensembles  $E$  et  $F$  (non vides) est une notion clé en mathématiques. C'est l'idée d'associer, ou de faire correspondre, à chaque élément de  $E$  un élément de  $F$ .

#### Définition 5 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles (non vides).

On appelle application (ou fonction) de  $E$  dans  $F$  toute relation  $\mathcal{R} = (E; F; \mathcal{G})$  telle que :

$$\forall x \in E, \forall (y; y') \in F^2, x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y' \implies y = y'.$$

On dit alors que :

- $E$  est l'ensemble de départ.
- $F$  est l'ensemble d'arrivée.
- $y$  est l'image de  $x$  par  $\mathcal{R}$  que l'on notera plutôt  $y = \mathcal{R}(x)$ .
- $x$  est un antécédent de  $y$  par  $\mathcal{R}$ .
- $\mathcal{G}$  est le graphe de la relation. C'est une partie de  $E \times F$ .

L'ensemble des fonctions  $E$  vers  $F$  est noté  $\mathcal{F}(E; F)$  ou encore  $F^E$ .

## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

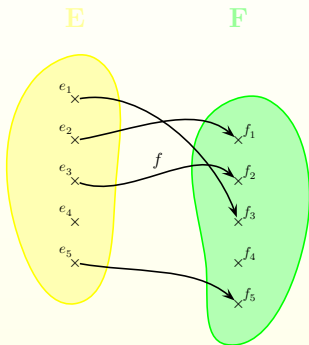


Figure 1 – Diagramme sagittal d'une fonction qui n'est pas une application.

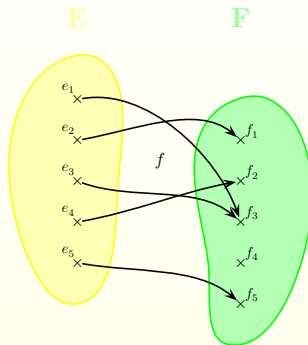


Figure 2 – Diagramme sagittal d'une application.





## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

Dans la suite et comme demandé dans le programme, nous ne ferons plus la différence entre ces deux termes. Celui de « fonction » nous permettant, par exemple, de chercher le domaine de définition de la fonction  $\frac{1}{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ .

En d'autres termes, définir l'application  $\frac{1}{x} : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ .



## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

Définir une application nécessite donc la donnée de  $E$ , de  $F$  et du graphe  $\mathcal{G}$ , ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément  $f(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Pour désigner une application on utilise en général une lettre minuscule. Si  $f$  est une application de  $E$  vers  $F$  on écrit plus simplement :

$$f : E \longmapsto F$$
$$x \qquad f(x),$$

et le graphe de  $f$  est l'ensemble  $\mathcal{G}_f = \{ (x; f(x)) / x \in E \}$ .

Vocabulaire :

- Si  $E = \mathbb{R}$ , on parle de fonction de la variable réelle ou, plus simplement, de fonction réelle.
- Si  $F \subset \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on parlera de fonction à valeurs réelles ou complexes réciproquement.



## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

#### Exemples 5 :

- L'exponentielle est une application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$ .
- Le logarithme est une application de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  mais pas de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  n'est pas une application car 0 n'a pas d'image. Son ensemble de définition est  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ .

En conséquence, l'application  $\left(\frac{1}{x}\right)_{|_{\mathcal{D}_f}} : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$  est correctement définie.

- Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Le schéma :

$$\mathbb{1} : E \longmapsto \{0; 1\}$$
$$x \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

n'est celui d'une fonction sur E que si  $A \cup B = E$  et  $A \cap B = \emptyset$ .

## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

Définition  $\hookrightarrow$  (Domaine de définition) :

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \mapsto \mathbb{R}$ .

On appelle **domaine de définition** de  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$ , l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe}\}.$$

Si  $x \in \mathcal{D}_f$  et si  $y = f(x)$ , on dit que :

- $y$  est l'image de  $x$  par  $f$ ,
- $x$  est un antécédent de  $y$  par  $f$  (pas forcément unique).

Toute étude de fonction  $f$  devra donc commencer par préciser son domaine de définition.



## II. Applications

### 1. Fonctions et Applications

#### Méthode 1 :

À ce stade l'année, seules trois expressions peuvent réduire un domaine de définition :

- ① Les expressions de la forme  $\frac{\dots}{\boxed{\phantom{0000}}}$  : Il suffira de s'assurer que  $\boxed{\phantom{0000}} \neq 0$ .

Une équation à résoudre ...

- ② Les expressions de la forme  $\sqrt{\boxed{\phantom{0000}}}$  ou  $\ln(\boxed{\phantom{0000}})$  : Il suffira de s'assurer que  $\boxed{\phantom{0000}} \geq 0$  ou  $\boxed{\phantom{0000}} > 0$ . Une étude de signes à faire ...

#### Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

①  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

②  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

③  $x \mapsto \ln |\ln x|$

## II. Applications

### 2. Zoologie

Définition 7 (Identité d'un ensemble) :

Soit  $E$  un ensemble.

L'**identité** de  $E$  est l'application de  $E$  dans  $E$  qui à chaque élément de  $E$  associe lui-même. On la note :

$$\begin{array}{ccc} id_E : & E & \longmapsto & E \\ & x & & id_E(x) = x \end{array} .$$

Exemples 6 (Important) :

- La fonction nulle sur un ensemble  $E$  est définie par  $0_E : E \longmapsto \mathbb{R}$ .  
$$\begin{array}{ccc} & x & & 0 \end{array}$$
- Soit  $E \subset F$ . L'injection canonique  $i : E \hookrightarrow F$  définie par  $\forall x \in E$ ,  
 $i(x) = x \in F$ .
- La projection canonique  $p_E : E \times F \longmapsto E$  définie par  $p_E((x; y)) = x$ .

## II. Applications

### 2. Zoologie

ATTENTION

#### Égalité de fonctions

Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont égales si, et seulement si elles ont :

- le même ensemble de départ  $E$ ,
- le même ensemble d'arrivée  $F$ ,
- le même graphe *i.e.*  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

Par exemple, la fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  et la fonction  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$  définie par  $g(x) = x^2$  ne sont pas égales !



## II. Applications

### 2. Zoologie

Définition 8 (Coincidence) :

Soient  $f : E \mapsto F$  et  $g : E' \mapsto F'$  deux applications.

On dit que  $f$  et  $g$  **coïncident** sur une partie  $A$  de  $E \cap E'$  si  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$ .

Exemple 1 :

$f : x \mapsto \ln(x^2)$  et  $f : x \mapsto 2 \ln(x)$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+^*$  sans être égales.





## II. Applications

### 2. Zoologie

#### Définition 9 (Restriction) :

Soient  $f : E \mapsto F$  une application entre deux ensembles  $E$  et  $F$ .

Si  $A \subset E$ , on appelle **restriction** de  $f$  à  $A$ , notée  $f|_A$ , l'application définie par :

$$f|_A : A \longmapsto F$$
$$x \qquad f(x).$$

Une fonction  $f$  et sa restriction  $f|_A$  à une partie  $A$  coïncident donc sur  $A$ .

#### Exemple 8 :

La valeur absolue  $|| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$  est la restriction à  $\mathbb{R}$  du module  $|| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}_+$ .



## II. Applications

### 2. Zoologie

Définition 10 (Prolongement) :

Soient  $f : E \mapsto F$  une application entre deux ensembles  $E$  et  $F$ .

Si  $E \subset E'$ , on appelle **prolongement** de  $f$  à  $E'$ , notée en général  $\tilde{f}$ , l'application  $\tilde{f} : E' \mapsto F$  qui coïncide avec  $f$  sur  $E$ .

Remarque : La fonction  $f$  est alors une restriction de  $\tilde{f}$  sur  $E$ .

Exemples 9 :

- $x \mapsto \ln |x|$  est un prolongement de  $\ln$  à  $\mathbb{R}^*$ .
- Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , on peut prolonger  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  de  $\mathbb{R}^*$  à  $\mathbb{R}$  en posant :

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$x$	$\left  \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$
-----	---

## II. Applications

### 2. Zoologie

#### Définition II (Corestriction) :

Soient  $f : E \mapsto F$  une application entre deux ensembles  $E$  et  $F$ . Si  $B$  est une partie de  $F$  telle que  $f(E) \subset B$ , on appelle **corestriction** de  $f$  à  $B$ , notée  $f|B$ , l'application définies par :

$$f|B : E \longmapsto B \\ x \qquad \qquad f(x).$$

Pour des raisons pratiques, il nous arrivera fréquemment de corestreindre une application

$f : I \mapsto J$  à son image  $f(I)$  et de considérer  $\tilde{f} : I \mapsto f(I)$ .

**Remarque** : Si la restriction d'une application est toujours possible, ce n'est pas le cas de la corestriction à une partie  $B$  de  $F$  qui nécessite que  $f(E) \subset B$ .

#### Exemple 10 :

Soit  $\chi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ , on peut définir  $\chi^{[-2,+\infty[}$  et  $\chi^{[0,+\infty[}$ , mais pas  $\chi^{[1,2]}$ .

## II. Applications

### 2. Zoologie

Définition 12 (Fonction indicatrice) :

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

On appelle fonction indicatrice de  $A$ , notée  $\mathbb{1}_A$ , l'application de  $E$  dans  $\{0; 1\}$  définie par :

$$\mathbb{1}_A : E \longmapsto \{0; 1\}$$
$$x \qquad \mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$



## II. Applications

### 3. Opérations algébriques

Définition 13 (Somme, produit et quotient de fonctions) :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $E$  à valeurs dans  $F$ .

- On appelle fonction **somme** de  $f$  et  $g$ , notée  $f + g$ , la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- On appelle fonction **produit** de  $f$  et  $g$ , notée  $f \times g$  ou  $fg$ , la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $E$ , on appelle fonction **quotient** de  $f$  et  $g$ , notée  $\frac{f}{g}$ , la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $\lambda f$  par :

$$\forall x \in E, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

## II. Applications

### 3. Opérations algébriques

L'ensemble des fonctions de  $E$  dans  $F$  récupère alors, par l'intermédiaire des ces définitions, les propriétés de l'ensemble d'arrivée  $F$ .

Par exemple, si  $F$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , la somme et le produit de deux fonctions sont associatifs, commutatifs et le produit est distributif sur l'addition.



## II. Applications

### 4. Composition

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application coïncide avec l'ensemble de départ d'une autre application, alors il est possible « d'enchaîner » les deux, c'est la composition :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad} & F & \xrightarrow{\quad} & G \\ x & & f(x) & & g(f(x)) \end{array}$$

**Définition 14 (Composée de fonctions) :**

Soient  $E, F, E'$  et  $G'$  des ensembles et  $f : E \mapsto F, g : E' \mapsto F'$  deux applications telles que  $f(E) \subset E'$ .

La **composée** de  $f$  par  $g$ , notée  $g \circ f$ , est l'application de  $E$  sur  $F'$  définie par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : & E & \xrightarrow{\quad} & F' \\ & x & & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

## II. Applications

### 4. Composition

Lorsque l'on a deux applications  $f : E \mapsto F$  et  $g : H \mapsto G$  avec seulement  $F \subset H$  (au lieu de  $F = H$ ) la définition n'autorise théoriquement pas la construction de  $g \circ f$ .

Néanmoins si  $f(E) \subset H$ , on peut considérer la composée  $g|_{f(E)} \circ f|^{f(E)}$  que l'on écrira encore, par abus de langage et soucis de simplicité,  $g \circ f$ .

#### ATTENTION

La condition  $f(E) \subset E'$  ou encore «  $f$  est à valeurs dans  $E'$  » est particulièrement importante.

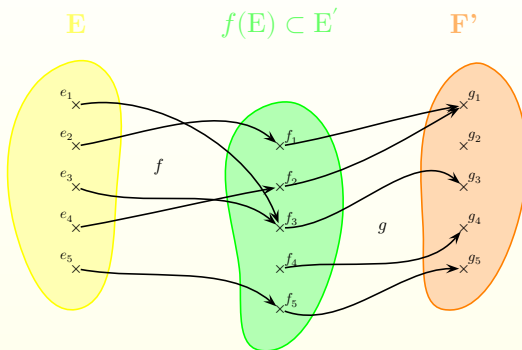
On doit garantir que  $f(x)$  appartienne au domaine de définition de  $g$  pour tout  $x$  de  $E$ .





## II. Applications

### 4. Composition



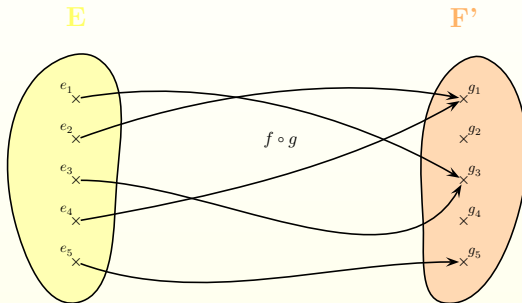
$$f(E) = \{f_1, f_2, f_3, f_5\} \subset E' \text{ et } g(E') = \{g_1, g_3, g_4, g_5\} \subset F'$$

Figure 3 – Diagramme sagittal d'une composée



## II. Applications

### 4. Composition



$$(g \circ f)(E) = \{g_1, g_3, g_5\} \subset g(E') \subset F'.$$

Figure 4 – Diagramme sagittal d'une composée



## II. Applications

### 4. Composition

Exemple II :

L'ensemble de définition de la fonction  $x \mapsto \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$  est  $]0; 2[$ .



## II. Applications

### 4. Composition

Lorsque  $f$  est une application d'un ensemble  $E$  vers lui-même, alors on peut composer  $f$  avec elle-même, et autant de fois que l'on veut et on notera

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Par convention, on pose  $f^0 = id_E$ .

Exemple 12 :

Considérons une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 \in I \text{ stable par } f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

En particulier,  $u_{n+1} = f^{n+1}(u_0)$ .



## II. Applications

### 4. Composition

Sauf cas particulier,  $f \circ g \neq g \circ f$ . La composition n'est pas une opération commutative.

#### ATTENTION

L'existence de  $g \circ f$  ne garantit pas celle de  $f \circ g$ .

Comparez, par exemple, les domaines de définition de  $x \mapsto \ln |x|$  et  $x \mapsto |\ln(x)|$ .



## II. Applications

### 4. Composition

#### Exercice 4 :

Déterminer, si possible, les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  et préciser leur domaine de définition.

$$\textcircled{1} \quad f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \qquad \qquad x^3 \qquad \qquad x \qquad \qquad x - 1$$

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \qquad \qquad x^2 \qquad \qquad x \qquad \qquad \sqrt{x}$$

$$\textcircled{3} \quad f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \qquad \qquad \ln x \qquad \qquad x \qquad \qquad x^2 - 1$$



## II. Applications

### 4. Composition

#### Théorème 3 :

Soient  $f : E \mapsto F$ ,  $g : F \mapsto G$  et  $h : G \mapsto H$  trois applications.

- $id_F \circ f = f$  et  $f \circ id_E = f$ . On dit que l'identité est élément neutre pour la composition.
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ . La composition est associative.



# III. Aspects qualitatifs

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs**
  - Graphe d'une fonction
  - De l'intérêt des fonctions de référence
  - Parité, imparité et symétrie
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque





### III. Aspects qualitatifs

#### 1. Graphe d'une fonction

Dans le cas d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , le graphe correspond au sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  constitué des éléments  $(x; f(x))$ , pour  $x \in \mathcal{D}_f$ .

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé direct.

Définition 15 (Graphe d'une fonction) :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  et à valeurs réelles.

On appelle **courbe représentative** de  $f$  ou **graphe** de  $f$ , et on note  $\mathcal{C}_f$  ou  $\mathcal{G}$ , l'ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$\mathcal{C}_f = \left\{ (x; y) / (x \in \mathcal{D}_f) \wedge (y = f(x)) \right\}.$$



### III. Aspects qualitatifs

#### 1. Graphe d'une fonction

On ne peut pas toujours tracer la représentation d'une fonction. Par exemple, la courbe de  $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  produit des oscillations non représentables au voisinage de 0.

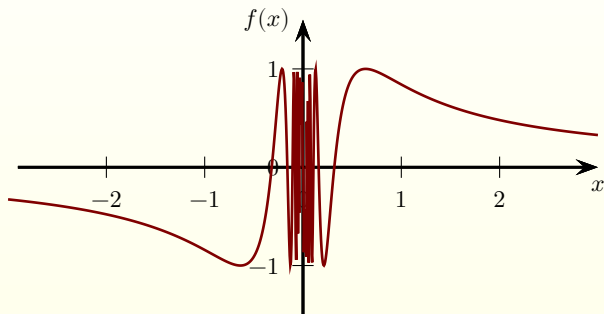


Figure 5 – La fonction  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  n'est pas représentable au voisinage de 0.



### III. Aspects qualitatifs

#### 2. De l'intérêt des fonctions de référence

Proposition 4 (Effet des transformations usuelles sur  $\mathcal{C}_f$ ) :

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$  se déduit du graphe de  $f$  par une translation de vecteur  $a\vec{j}$ .
- $x \mapsto f(x - a)$  se déduit du graphe de  $f$  par une translation de vecteur  $a\vec{i}$ .
- $x \mapsto f(a - x)$  se déduit du graphe de  $f$  par une symétrie d'axe  $x = \frac{a}{2}$ .
- $x \mapsto f(ax)$  se déduit du graphe de  $f$  par une dilatation horizontale de rapport  $\frac{1}{a}$ , ( $a \neq 0$ ).
- $x \mapsto af(x)$  se déduit du graphe de  $f$  par une dilatation verticale de rapport  $a$ .



### III. Aspects qualitatifs

#### 2. De l'intérêt des fonctions de référence :

Cette proposition donne tout son intérêt aux fonctions, dites de référence :

- $x \mapsto x$

- $x \mapsto x^2$

- $x \mapsto x^3$

- $x \mapsto \frac{1}{x}$

- $x \mapsto \ln x$

- $x \mapsto \sin x$

- $x \mapsto \cos x$

- $x \mapsto e^x$



### III. Aspects qualitatifs

#### 2. De l'intérêt des fonctions de référence

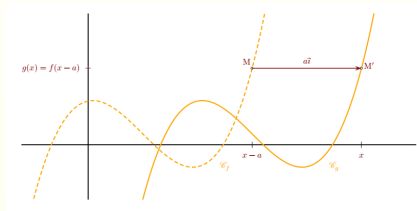
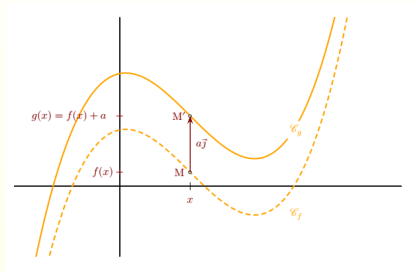


Figure 6 -  $x \mapsto g(x) = f(x) + a$  et  $x \mapsto g(x) = f(x - a)$ .



### III. Aspects qualitatifs

#### 2. De l'intérêt des fonctions de référence

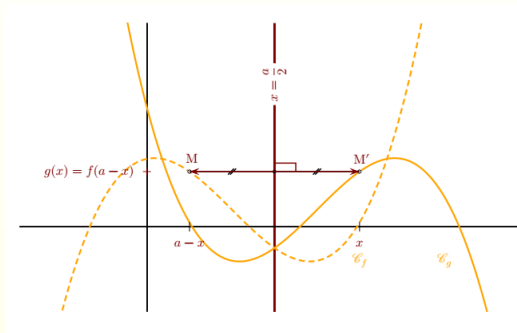


Figure 7 -  $x \mapsto g(x) = f(a-x)$ .



### III. Aspects qualitatifs

#### 2. De l'intérêt des fonctions de référence

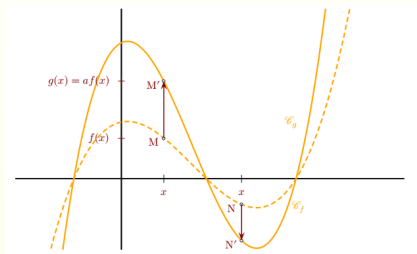
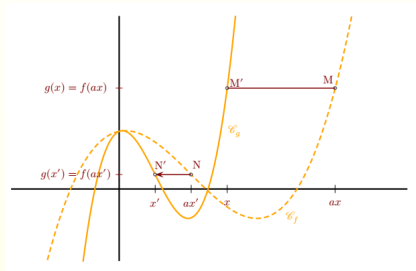


Figure 8 -  $x \mapsto g(x) = f(ax)$  et  $x \mapsto g(x) = af(x)$ .



### III. Aspects qualitatifs

#### 3. Parité, imparité et symétrie

##### Définition 16 :

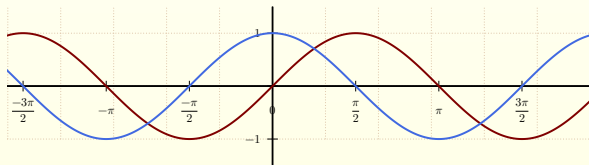
- Une fonction  $f$  est **paire** lorsque son domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x).$$

- Une fonction  $f$  est **impaire** lorsque son domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 0 que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x).$$

**Remarque** : Le graphe d'une fonction **continue** et impaire passe toujours par l'origine.





### III. Aspects qualitatifs

#### 3. Parité, imparité et symétrie

##### Exemples 13 :

- Les fonctions  $x \mapsto x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $||$ ,  $\cos$ ,  $\text{ch}$  sont paires.
- Les fonctions  $x \mapsto x^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\sin$ ,  $\text{sh}$  et  $\tan$  sont impaires.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires :  $x \mapsto e^x$ .
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Pour mémoire :

##### Rappel :

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ .

Il existe une unique fonction  $f_p$  paire et une unique fonction  $f_i$  impaire telles que :

$$f = f_p + f_i.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

$f_p$  et  $f_i$  s'appellent respectivement les *partie paire* et *partie impaire* de  $f$ .

### III. Aspects qualitatifs

#### 3. Parité, imparité et symétrie

Proposition 5 (Interprétation graphique) :

- Une fonction  $f$  est paire si, et seulement si sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction  $f$  est impaire si, et seulement si sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère.

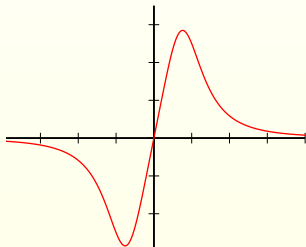


Figure 10 -  $x \mapsto \frac{5x}{x^4 + 1}$  est impaire.

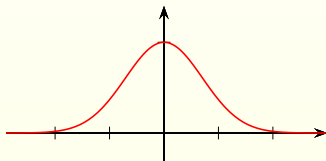


Figure 11 -  $x \mapsto e^{-x^2}$  est paire.



## III. Aspects qualitatifs

### 3. Parité, imparité et symétrie

#### Méthode 2 :

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on restreint son étude au domaine  $\mathcal{D}_f \cap [0; +\infty[$  et on complète la courbe par symétrie.



# IV. Fonctions et relation d'ordre

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre**
  - Fonctions monotones
  - Fonctions majorées, minorées, bornées, ...
  - Extrema
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 1. Fonctions monotones

#### Définition 17 (Fonctions monotones) :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est **croissante** (resp. strictement croissante) sur  $I$  si :

$$\forall (x; y) \in I^2, x < y \implies f(x) \leq f(y) \text{ (resp. } f(x) < f(y)\text{)}.$$

- La fonction  $f$  est **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur  $I$  si :

$$\forall (x; y) \in I^2, x < y \implies f(x) \geq f(y) \text{ (resp. } f(x) > f(y)\text{)}.$$

- La fonction  $f$  est **monotone** sur  $I$  (resp. strictement monotone) sur  $I$  si  $f$  est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur  $I$ .

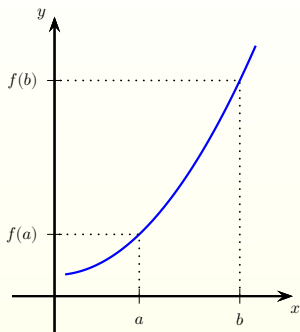
**Remarque** : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions compatibles avec la relation d'ordre de  $\mathbb{R}$ .

La **définition (17)** est générale et **ne** requiert **pas** la dérivabilité.



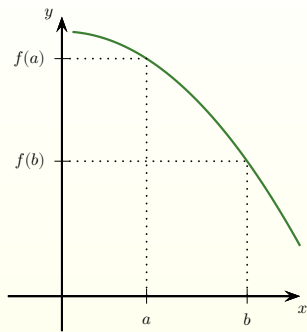
## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 1. Fonctions monotones



Fonction croissante sur I

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$



Fonction décroissante sur I

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

Figure 12 – Une fonction croissante conserve les inégalités, une décroissante les renverse



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 1. Fonctions monotones

#### Exemples 14 :

- 1 La fonction  $\cos$  est :
  - décroissante sur tout intervalle de la forme  $[2k\pi; (2k+1)\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
  - croissante sur tout intervalle de la forme  $[(2k+1)\pi; (2k+2)\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
  - mais elle n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}$ .
- 2 Les fonctions  $\exp$  et  $\ln$  sont strictement croissantes respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 5 :

Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

- 1  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .
- 2  $f$  est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$ .



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 1. Fonctions monotones

Proposition 6 (Composée de fonctions monotones) :

La composée de fonctions monotones est monotone et la règle des signes donne le sens de la monotonie.

**Remarque** : On ne peut en revanche rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones en général !

Par exemple  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}_+$  mais pas  $x \mapsto x^2 - x$ .

Exemple 15 :

Pas besoin de dériver pour expliquer que la fonction  $x \mapsto x + \ln x$ , somme de fonctions strictement croissantes, est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  pas plus que pour la fonction  $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}_+$ , composée de fonctions croissantes ou encore  $x \mapsto \sqrt{x}e^x$ , produit de fonctions **positives** croissantes sur  $\mathbb{R}_+$ .





# IV. Fonctions et relation d'ordre

## 1. Fonctions monotones

Exercice 6 :

Sans calcul de dérivée, étudier le sens de variation de :

①  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

②  $x \mapsto \exp(x^2)$  sur  $\mathbb{R}$ .

③  $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) - 1}$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .

④  $x \mapsto \sqrt{2 - \tan^3 x}$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 2. Fonctions majorées, minorées, bornées, ...

#### Définition 18 (Fonction bornées) :

Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- Une fonction  $f$  est dite **majorée** sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Le réel  $M$  est alors appelé un **majorant** de  $f$  (sur  $I$ ).

- Une fonction  $f$  est dite **minorée** sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $m$  tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m.$$

Le réel  $m$  est alors appelé un **minorant** de  $f$  (sur  $I$ ).

- Une fonction  $f$  est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

**ATTENTION**

Les minorants et majorants ne sont pas forcément atteints même lorsqu'ils existent (*confer l' exemple (16) ).*



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 2. Fonctions majorées, minorées, bornées, ...

Exercice 7 :

Soit  $f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ . Montrer que  $f$  est majorée.

Proposition 7 :

Une fonction  $f$  est bornée si, et seulement si  $|f| : x \mapsto |f(x)|$  est majorée.



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 2. Fonctions majorées, minorées, bornées, ...

Exemple 16 :

La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , y est bornée. Majorée par 1 (atteint) et minorée par 0 (non atteint).

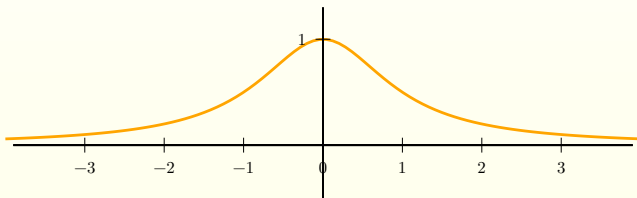


Figure 13 – Courbe représentative d'une fonction bornée.



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 3. Extrema

#### Définition 19 (Extrema globaux et locaux) :

Soient  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

- La fonction  $f$  admet un **maximum global** (resp. **minimum global**) en  $x_0$  si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

On note alors  $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$  (resp.  $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$ ).

- La fonction  $f$  admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en  $x_0$  s'il existe un intervalle  $J \subset I$  contenant  $x_0$  tel que :

$$\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

On note alors  $f(x_0) = \max_{x \in J} f(x)$  (resp.  $f(x_0) = \min_{x \in J} f(x)$ ).



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 3. Extrema

Il est clair que, dans le cadre de la définition,

$$\max_{x \in J} f(x) \leq \max_{x \in I} f(x) \quad \text{et} \quad \min_{x \in J} f(x) \geq \min_{x \in I} f(x).$$

**Remarque** : Une fonction non bornée ne peut clairement pas avoir d'extrema globaux mais seulement des extrema locaux.

Exemple 17 :

Reprenons la fonction de **exemple** (16) définie par  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

- $f$  admet un maximum global en  $x_0 = 0$  qui est 1.
- $f$  est minorée par 0 sans avoir de minimum global.



## IV. Fonctions et relation d'ordre

### 3. Extrema

#### Exercice 8 :

Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x$  admet un maximum local en  $-1$ .



# V. Dérivation

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation**
  - Taux d'accroissement et nombre dérivé
  - Opérations algébriques et dérivation
  - Composition et dérivation
  - Monotonie et dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque





# V. Dérivation

## 1. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

Soient  $I$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

- On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$  si  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow a$ ,  $x \neq a$ .

Dans ce cas, on appelle cette limite **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- On dit que  $f$  est **dérivable** sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout  $a \in A$  au sens précédent.

On appelle alors **fonction dérivée** de  $f$  sur  $A$ , que l'on note  $f'$  (ou  $\frac{df}{dx}$ ), la fonction qui à tout  $x$  de  $A$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  :

$$f' : A \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \qquad \qquad f'(x).$$

# V. Dérivation

## 1. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 20 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) :

- On note  $\mathcal{D}(A, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $A$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- La tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $a$  est définie comme la droite d'équation

$$(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



# V. Dérivation

## 1. Taux d'accroissement et nombre dérivé

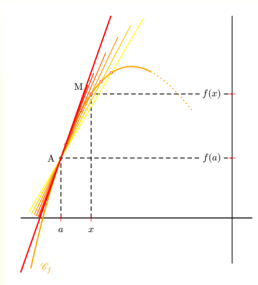


Figure 14 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

**Remarques** : La dérivation est une notion :

- locale et non ponctuelle : la fonction  $f$  doit être définie dans un voisinage de  $a$  et pas seulement en  $a$ .
- locale et non globale : elle ne dépend que de la restriction de  $f$  à un voisinage de  $a$  quel qu'il soit et non de sa description globale.



# V. Dérivation

## 2. Opérations algébriques et dérivation

### Proposition 8 :

Soient  $I$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions dérivables en  $a$  est une fonction dérivable en  $a$  et

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

- Le produit de deux fonctions dérivables en  $a$  est une fonction dérivable en  $a$  et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$



# V. Dérivation

## 2. Opérations algébriques et dérivation

### Proposition 8 :

Soient  $I$  un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- L'inverse d'une fonction dérivable en  $a$  et **ne s'annulant pas en  $a$**  est une fonction dérivable en  $a$  et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

- Le quotient de deux fonctions dérivables en  $a$  dont le **dénominateur ne s'annule pas en  $a$**  est une fonction dérivable en  $a$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$



# V. Dérivation

## 3. Composition et dérivation

### Théorème 9 (Dérivée d'une composée) :

Soient  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  tel que  $u(I) \subset J$ .

Alors la fonction  $f \circ u$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$



# V. Dérivation

## 3. Composition et dérivation

Rappel :

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant les conditions du tableau.

Fonction $f$	Dérivée $f'$	Conditions sur $u$
$x \mapsto u(ax + b)$	$au'(ax + b)$	$ax + b \in I.$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\forall x \in I, u(x) > 0.$
$u^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu' \times u^{n-1}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n < 0.$

## V. Dérivation

### 3. Composition et dérivation

Rappel :

$e^u$	$u' e^u$	
$\ln  u $	$\frac{u'}{u}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0.$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2(u))$	$\forall x \in I,$ $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}.$
$f(u)$	$u' \times f'(u)$	$u(I) \subset J.$



# V. Dérivation

## 3. Composition et dérivation

Exercice 9 :

Étudier la dérivabilité et donner sa dérivée le cas échéant de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x(1-x)}).$$



# V. Dérivation

## 4. Monotonie et dérivation

### Théorème 10 :

Soient  $I$  un (seul) intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

Alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si, et seulement si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ .

Pour la stricte monotonie :

- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si, et seulement si  $f'$  est positive sur  $I$  et non identiquement nulle sur tout intervalle  $[a; b] \subset I$  avec  $a < b$ .
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si, et seulement si  $f'$  est négative sur  $I$  et non identiquement nulle sur tout intervalle  $[a; b] \subset I$  avec  $a < b$ .



# V. Dérivation

## 4. Monotonie et dérivation

### Méthode 3 :

Les cas d'utilisation les plus courants sont :

- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

### ATTENTION

$f$  strictement croissante sur  $I$  n'implique pas que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ .

**Contre-exemple :** la fonction cube  $f : x \mapsto x^3$ .



# V. Dérivation

## 4. Monotonie et dérivation

**ATTENTION**

Il est fondamental de raisonner sur un intervalle donné!

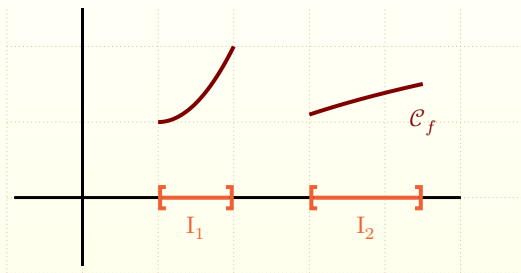


Figure 15 –  $f$  est croissante sur  $I_1$  et  $I_2$  donc  $f' \geq 0$  mais n'est pas croissante sur  $I = I_1 \cup I_2$ .



# VI. Continuité

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité**
  - Fonction continue
  - Opérations algébriques et continuité
  - Théorème des valeurs intermédiaires
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque



# VI. Continuité

## 1. Fonction continue

### Définition 21 :

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- On dit que  $f$  est **continue**  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- On dit que  $f$  est **continue sur**  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  leur ensemble.

Graphiquement, la courbe d'une fonction continue peut se tracer sans lever le crayon.



# VI. Continuité

## 1. Fonction continue

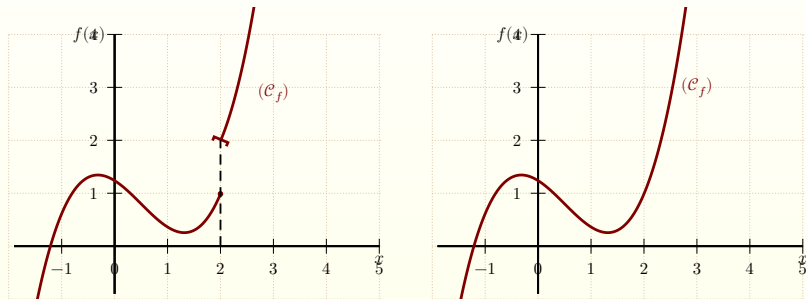


Figure 16 – Exemples de fonctions définies continues et discontinues en un point.



# VI. Continuité

## 2. Opérations algébriques et continuité

Proposition II (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ .

- ①  $|f|$  est continue sur  $I$ .
- ② Toute combinaison linéaire  $\lambda f + g$  de fonctions continues sur  $I$  est continue sur  $I$ .
- ③ Le produit  $f \times g$  de deux fonctions continues sur  $I$  est continue sur  $I$ .
- ④ Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$ .
- ⑤ Si  $f(I) \subset J$  et si  $g$  est continue sur  $J$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .



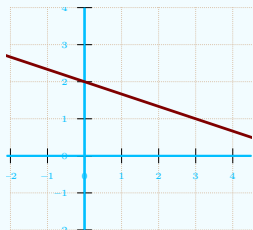


# VI. Continuité

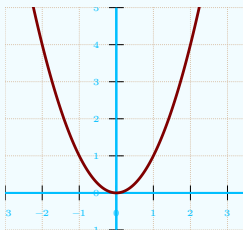
## 2. Opérations algébriques et continuité

Exemples 18 :

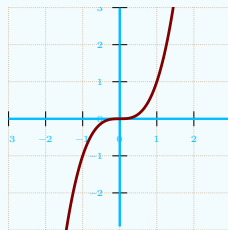
- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



$$x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2.$$



$$x \mapsto x^2.$$



$$x \mapsto x^3.$$

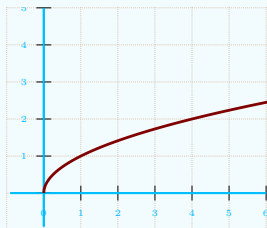


# VI. Continuité

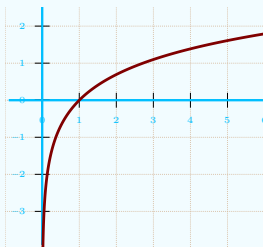
## 2. Opérations algébriques et continuité

Exemples 18 :

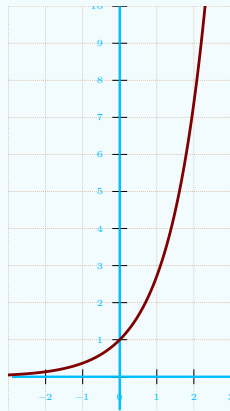
- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur ensemble de définition ;



$$x \mapsto \sqrt{x}.$$



$$x \mapsto \ln x$$



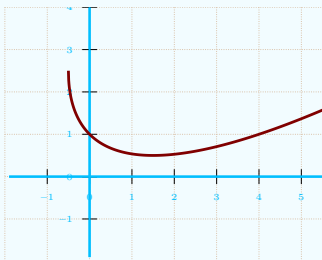
$$x \mapsto e^x.$$

# VI. Continuité

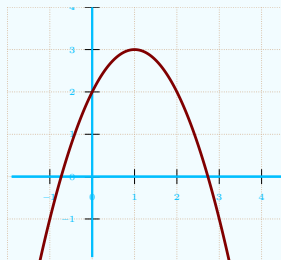
## 2. Opérations algébriques et continuité

### Exemples 18 :

- les fonctions construites à partir des fonctions de référence par combinaisons linéaires, produits ou composition sont continues sur leurs ensembles de définition ;



$$x \mapsto x - \sqrt{2x+1} + 3 \text{ sur } \left[-\frac{1}{2}; +\infty[.$$



$$x \mapsto -(x+1)(x-3) - 1.$$

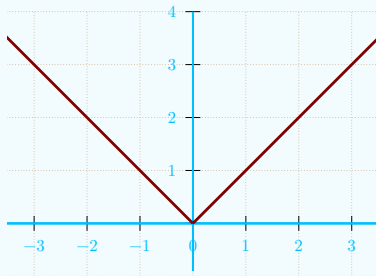


# VI. Continuité

## 2. Opérations algébriques et continuité

Exemples 18 :

- la fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$ .



$$x \mapsto |x|.$$

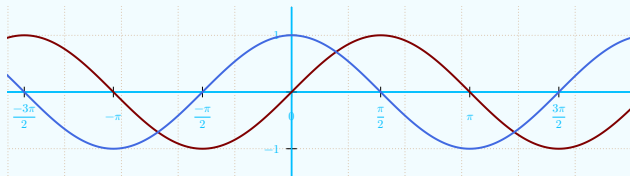


# VI. Continuité

## 2. Opérations algébriques et continuité

Exemples 18 :

- Les fonctions sin et cos sont continues sur  $\mathbb{R}$ .



$x \mapsto \cos x$     et     $x \mapsto \sin x$ .



# VI. Continuité

## 2. Opérations algébriques et continuité

**Théorème 12 (Dérivabilité  $\Rightarrow$  continuité) :**

- Toute fonction dérivable en un point  $a$  et continue en ce point.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

**ATTENTION**

Les réciproques sont fausses !

**Contre-exemples :** valeur absolue, racine carrée en 0.



# VI. Continuité

## 3. Théorème des valeurs intermédiaires

### Théorème 13 (TVI) :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ .

- 1 Si  $f$  change de signe sur  $I$  alors elle s'y annule :

Pour tous réels  $a < b$  de  $I$ ,  $f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists c \in [a; b] / f(c) = 0$ .

- 2  $f(I)$  est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de  $f$  admet au moins un antécédent par  $f$ .

$\forall f(a), f(b) \in f(I), f(a) < k < f(b) \implies \exists c \in [a; b] / f(c) = k$ .

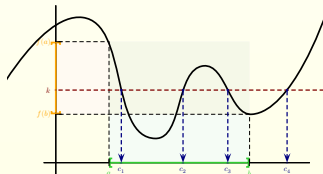


Figure 17 – Une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  prend toutes les valeurs de celui-ci

## VI. Continuité

### 3. Théorème des valeurs intermédiaires

Remarques :

- Ce théorème assure l'existence d'une solution à l'équation  $f(x) = k$  sans en donner la valeur.
- Ce théorème ne dit rien sur l'unicité d'une solution.

**Théorème 14 (TVI strictement monotone) :**

Soient  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a < b$  deux réels de  $I$ .

Si  $f$  continue et strictement monotone, alors tout réel  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  admet un unique antécédent par  $f$  qui est dans  $[a; b]$  :

$$\exists ! x \in [a; b] / y = f(x).$$

**Exercice 10 :**

Montrer que  $0,8$  admet un unique antécédent par la fonction  $\cos$  dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .



# VII. Injection, Surjection et Bijection

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection**
  - Injection
  - Surjection
  - Bijection
- 8 Réciproque



# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 1. Injection

### Théorème 15 :

Soient  $f : E \mapsto F$  et  $g : F \mapsto G$  deux applications.

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives alors  $g \circ f$  est injective.
- Si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux injections est une injection.

### ATTENTION

Dans la deuxième assertion du **théorème** (15), la fonction  $g$  n'est en rien obligée d'être injective !

### Exercice II :

Donner un exemple où  $g \circ f$  est injective et  $g$  n'est pas injective.



# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 1. Injection

### Théorème 15 :

Soient  $f : E \mapsto F$  et  $g : F \mapsto G$  deux applications.

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives alors  $g \circ f$  est injective.
- Si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.

### ATTENTION

Dans la deuxième assertion du **théorème** (15), la fonction  $g$  n'est en rien obligée d'être injective !

### Exercice II :

Donner un exemple où  $g \circ f$  est injective et  $g$  n'est pas injective.

### Correction II :

Considérer  $x \mapsto (e^x)^2$ .

# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 2. Surjection

### Théorème 16 :

Soient  $f : E \mapsto F$  et  $g : F \mapsto G$  deux applications.

- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives alors  $g \circ f$  est surjective.
- Si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection. On fera la même remarque sur la surjectivité de  $f$  dans la seconde assertion du **théorème (16)** que dans celle du **théorème (15)**.

### Exercice 12 :

Donner un exemple où  $g \circ f$  est surjective et  $f$  n'est pas surjective.



# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 2. Surjection

### Théorème 16 :

Soient  $f : E \mapsto F$  et  $g : F \mapsto G$  deux applications.

- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives alors  $g \circ f$  est surjective.
- Si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

Autrement dit et à retenir, la composée de deux surjections est une surjection. On fera la même remarque sur la surjectivité de  $f$  dans la seconde assertion du **théorème (16)** que dans celle du **théorème (15)**.

### Exercice 12 :

Donner un exemple où  $g \circ f$  est surjective et  $f$  n'est pas surjective.

### Correction 12 :

Considérer  $x \mapsto \ln(e^x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

## VII. Injection, Surjection et Bijection

### 3. Bijection

#### Définition 22 :

Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \mapsto F$  une application.

On dit que  $f$  est une **bijection** (ou application bijective) lorsque tout élément de  $F$  a un unique antécédent par  $f$  :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x).$$

Dire que tout élément de  $F$  a un unique antécédent revient à dire que tout élément de  $F$  a au moins un antécédent et au plus un antécédent.

Par conséquent dire que  $f$  est bijective revient à dire que  $f$  est surjective et injective.

$f$  est bijective  $\iff f$  est injective et surjective.



# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 3. Bijection

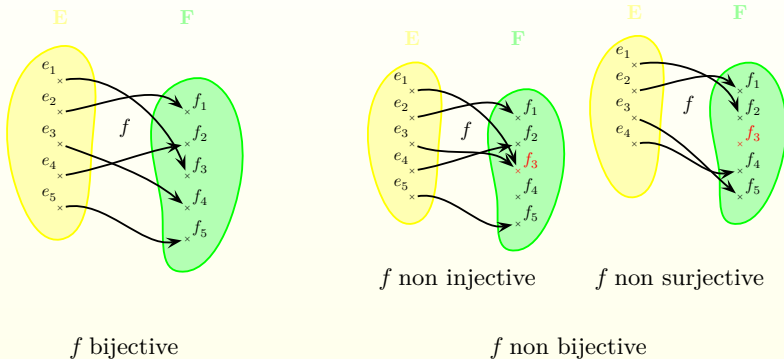


Figure 18 – Diagramme sagittal d'une fonction bijective.



## VII. Injection, Surjection et Bijection

### 3. Bijection

#### Exemples 19 (Important) :

- Si  $E$  est un ensemble non vide, alors  $id_E$  est une bijection.
- $f : [0; +\infty[ \mapsto [0; +\infty[$  définie par  $f(x) = x^2$  est une bijection.
- $\exp : \mathbb{R} \mapsto ]0; +\infty[$  et  $\ln : ]0; +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  sont des bijections.
- $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = e^x$  n'est pas une bijection.
- Si  $f : E \mapsto F$  est injective, alors  $f$  induit une bijection de  $E$  vers  $im f$  qui est  $\tilde{f} : E \mapsto im f$  définie par  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .  
Cela s'applique en particulier aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle  $I$ .

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones affirme que toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$  est une bijection de  $I$  sur son image  $f(I)$  :

$$\forall y \in f(I), \exists ! x \in I / y = f(x).$$





# VII. Injection, Surjection et Bijection

## 3. Bijection

**Théorème 17 (Théorème de la Bijection) :**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$  alors elle induit une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} : & I & \longrightarrow & f(I) & \text{est bijective.} \\ & x & & f(x) & \end{array}$$

De plus,  $f(I)$  est un intervalle d'un des types suivants :

	$I$	$[a; b]$	$[a; b[$	$]a; b]$	$]a; b[$
$f(I)$	$f$ croissante	$[f(a); f(b)]$	$[f(a); \lim_{b^-} f[$	$] \lim_{a^+} f; f(b)]$	$] \lim_{a^+} f; \lim_{b^-} f[$
	$f$ décroissante	$[f(b); f(a)]$	$] \lim_{b^-} f; f(a)]$	$[f(b); \lim_{a^+} f[$	$] \lim_{b^-} f; \lim_{a^+} f[$

## VII. Injection, Surjection et Bijection

### 3. Bijection

#### ATTENTION

Il existe des bijections non continues.

Remarques :

- Ne pas confondre  $f$  et  $\tilde{f}$  ( $\tilde{f}$  étant la corestriction de  $f$  à son ensemble image). Ces deux fonctions sont définies sur  $I$  mais ne possèdent pas nécessairement le même ensemble d'arrivée.  $\tilde{f}$  est bijective alors que  $f$  ne l'est pas forcément (sauf si  $f(I) = \mathbb{R}$ ).
- Bien comprendre la nuance : dire que la fonction  $f$  établit une bijection de  $I$  sur son ensemble image  $f(I)$  ne signifie pas que  $f$  est bijective mais que  $\tilde{f}$ , la corestriction de  $f$  à son ensemble image, l'est.

Exemples 20 :

- $\exp$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $\sin$  induit une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[-1; 1]$ .

# VIII. Réciproque

- 1 Le contexte
- 2 Applications
- 3 Aspects qualitatifs
- 4 Fonctions et relation d'ordre
- 5 Dérivation
- 6 Continuité
- 7 Injection, Surjection et Bijection
- 8 Réciproque
  - Bijection réciproque
  - Courbe représentative
  - Dérivabilité et Continuité



# VIII. Réciproque

## 1. Bijection réciproque

### Définition 23 :

Si  $f : E \mapsto F$  est une bijection, alors on peut considérer l'application qui va de  $F$  vers  $E$  et qui à tout élément  $x$  de  $F$  associe son unique antécédent par  $f$ , cette application est appelée **bijection réciproque** de  $f$ , on la note  $f^{-1}$  :

$$f^{-1} : F \longmapsto E$$

$x$   $y$  défini par  $f(y) = x$ .

**ATTENTION**

La notation  $f^{-1}$  n'a de sens que lorsque  $f$  est bijective.



## VIII. Réciproque

### 1. Bijection réciproque

Exemples 21 :

- Si  $E$  est un ensemble non vide, alors  $id_E$  est une bijection et la bijection réciproque est  $id_E^{-1} = id_E$ .
- $\exp$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; +\infty[$  dont la bijection réciproque est la fonction logarithme népérien.



## VIII. Réciproque

### 1. Bijection réciproque

Exemple 22 (Fondamental) :

La fonction carrée  $x \mapsto x^2$  n'est pas bijective sur  $\mathbb{R}$ .

Cependant, considérons sa restriction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Le théorème de la bijection affirme alors que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur son image  $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ .

Elle admet donc une bijection réciproque  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  qui est la fonction racine carrée :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$



# VIII. Réciproque

## 1. Bijection réciproque

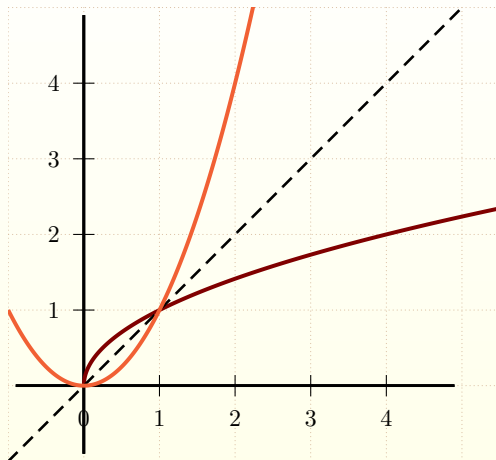


Figure 19 -  $x \mapsto x^2$  et sa réciproque  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .



# VIII. Réciproque

## 1. Bijection réciproque

### Théorème 18 :

Soit  $f : E \mapsto F$  une bijection.

- On a  $f^{-1} \circ f = id_E$  et  $f \circ f^{-1} = id_F$ .  
De plus  $f^{-1}$  est une bijection et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .
- Si  $g : F \mapsto G$  est une autre bijection, alors la composée  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  vers  $G$ , et sa bijection réciproque est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

aux ensembles de départ et d'arrivée dans la première assertion du théorème.

### ATTENTION

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \quad \text{MAIS} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x})^2 = x.$$





## VIII. Réciproque

### 1. Bijection réciproque

**Vocabulaire** : Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \mapsto E$ .

- On dit que  $f$  est une **involution** si  $f \circ f = id_E$ .

Dans ce cas  $f$  est bijective et est sa propre réciproque :  $f^{-1} = f$ .

#### Exemples 23 :

- Dans le plan, les symétries sont des involutions.
- La fonction  $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est une involution de  $\mathbb{R}^*$ .
- La conjugaison dans  $\mathbb{C}$  est une involution de  $\mathbb{C}$ .

- On dit que  $f$  est **idem-potente** si  $f \circ f = f$ .

#### Exemples 24 :

- Dans le plan, toute projection est idem-potente.
- L'identité, la valeur absolue (le module dans  $\mathbb{C}$ ) ou la partie entière, vérifient cette propriété.

# VIII. Réciproque

## 1. Bijection réciproque

### Exercice B :

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$\textcircled{1} f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$
$$(x; y) \qquad (x + y; x - y).$$

$$\textcircled{2} g: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$
$$(x; y) \qquad (x + y; xy).$$



## VIII. Réciproque

### 1. Bijection réciproque

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Pour montrer que  $f$  est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

#### Méthode 4 :

On montre que  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors, d'après le théorème de la bijection,  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ .

Cette méthode est simple à appliquer car il suffit de justifier que  $f$  est continue sur  $I$  et d'étudier ses variations pour montrer qu'elle est bijective.

Par contre, cette méthode ne donne pas l'expression de la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .

#### Exercice 14 :

Montrer que l'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  admet une unique solution sur  $[-1; 0]$ .

## VIII. Réciproque

### 1. Bijection réciproque

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Pour montrer que  $f$  est bijective, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

#### Méthode 5 :

Pour tout  $y \in F$ , on montre que l'équation  $y = f(x)$  (d'inconnue  $x$ ) possède une unique solution qui est, par définition,  $x = f^{-1}(y)$ .

Cette méthode, en général plus compliquée que la précédente, permet néanmoins d'obtenir l'expression de la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .

#### Exercice 15 :

Montrer que la fonction  $g : ]-1 ; +\infty[ \rightarrow ]-\infty ; 1[$  définie par  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.



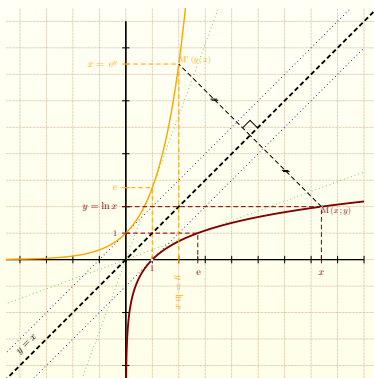
# VIII. Réciproque

## 2. Courbe représentative

Proposition 19 :

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une bijection de  $I$  sur  $J$ .

Les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .



# VIII. Réciproque

## 2. Courbe représentative

Exercice 16 :

Tracer l'allure de la courbe représentative de  $\arccos = (\cos)^{-1}$  à partir du graphe de  $\cos$  sur  $[0; \pi]$ .



# VIII. Réciproque

## 3. Dérivabilité et Continuité

**Théorème 20 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :**

Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection où  $I$  et  $J$  sont deux **intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

- ① **Variations** : Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f^{-1}$  l'est aussi et de même monotonie.
- ② **Continuité** : Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .
- ③ **Dérivabilité** : Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et on a :

$$\forall b \in J, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$



## VIII. Réciproque

### 3. Dérivabilité et Continuité

#### Exemple 25 :

La fonction exponentielle  $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée  $\exp' = \exp$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et est strictement monotone.

La fonction  $\exp$  est donc bijective et sa réciproque  $\ln : ]0; +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$





## VIII. Réciproque

### 3. Dérivabilité et Continuité

**Remarque** : Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  et  $f'(a) = 0$  alors  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente horizontale au point  $M(a; b)$  où  $b = f(a)$ .

Par symétrie, on en déduit que  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  admet une tangente verticale au point  $M(b; a)$ .

En particulier  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $b$ .

**Exemple 26 :**

$$f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+ \text{ est bijective de réciproque } f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+ .$$
$$x \qquad x^2 \qquad x \qquad \sqrt{x}$$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f'(x) = 2x$  ne s'annule que pour  $x = 0$ .

Ainsi,  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$ , et pour  $y \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

On retrouve que la réciproque de la fonction carrée n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine.

## VIII. Réciproque

### 3. Dérivabilité et Continuité

#### Exercice 17 :

Soit  $\varphi : x \mapsto x + e^x$ .

- 1 Montrer que  $\varphi$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un ensemble  $J$  à déterminer.
- 2 Justifier que  $\varphi^{-1}$  est dérivable sur  $J$ .
- 3 Déterminer  $(\varphi^{-1})'(1)$ .

