Applications

Soient $A \subset E \cap E'$, $E \subset G$ **et** $B \subset F$ **des ensembles et** $f : E \longmapsto F$ **une application.**

1 On dit que $g : E' \longmapsto F$ et f coïncident sur A si, et seulement si $f_{|A} \equiv g_{|A}$.

2 Une application g est un prolongement de f à G si, et seulement si g est définie sur G et coïncide avec f sur E.

3 Quelle condition nécessaire doit-on imposer pour considérer la corestriction de f à B ?
$f(E) \subset B$.

Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

4 La fonction f est dite *majorée* sur I si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ f(x) \leqslant M.$$

Le réel M est alors appelé un majorant de f (sur I).

5 La fonction f admet un *maximum global* en x_0 si :

$$\forall x \in I, \ f(x) \leqslant f(x_0).$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$.

6 On dit que f est *dérivable en* x_0 si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand $x \to x_0$, $x \neq x_0$.

Dans ce cas, on appelle cette limite nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

7 On dit que f est *continue en* x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

8 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (ni celui appliqué aux fonctions strictement monotones, ni celui de la bijection)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I\,;\mathbb{R})$.

Alors, $f(I)$ est un intervalle : tout réel entre deux valeurs de f admet au moins un antécédent par f.

$$\forall f(a), f(b) \in f(I), \ f(a) < k < f(b) \implies \exists c \in [a\,;b] \ / \ f(c) = k.$$

9 Soit $f : I \longmapsto J$ une bijection où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

(a) **Variations :** Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} l'est aussi et de même monotonie .

(b) **Continuité :** Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J .

(c) **Dérivabilité :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall b \in J, \ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

10 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

11 Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de f'.

La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Elle y est donc dérivable et on a :

$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$ du signe de $1-x$.

12 En déduire le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes du domaine de définition **sans justification**.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

13 En déduire que f établit une bijection de

(a) $[1\,;+\infty[$ sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

(b) et de $]-\infty\,;1]$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

$$\text{Soit } f \text{ définie par } f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}.$$

14 Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

$$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[.$$

15 Effectuer la division euclidienne de $x^3 - x$ par $x^2 - 4$:

$$3x^3 - x = x(x^2 - 4) + 3x.$$

16 Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2 - 4}$.

D'après la question précédente, si $x \neq \pm 2$, on a : $f(x) = x + \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.

17 Sans aucune justification, esquisser, sur le graphique ci-dessous, l'allure de la courbe représentative de f.