V

Fonctions de référence

Conformément au programme, ce chapitre a pour but de réveiller les souvenirs des années passées sur les fonctions, dites usuelles, dont les propriétés seront rappelées brièvement avant de creuser la théorie dans les chapitres ultérieurs.

L'étude des fonctions devra toujours se dérouler de la même manière dans un plan logique afin d'aboutir à l'allure de la courbe représentative.

Méthode I (Plan d'étude d'une fonction) :
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f i.e. on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.
2. On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas i.e. on ne travaille pas pour rien.
3. On détermine les limites de f au extrémités du domaine d'étude avant de les étendre au domaine de définition tout entier par symétrie ou translation.

   On effectue ici l'étude asymptotique de la fonction en dégageant les asymptotes éventuelles à la courbe.
4. On effectue l'étude locale en précisant les variations de la fonction.

   Dans le cas d'une fonction dérivable (ce que l'on justifiera) on calcule et on factorise f' afin d'en étudier le signe. On détermine également les points d'annulation de la dérivée afin d'avoir les lieux des tangentes « horizontales ».
5. On dresse le tableau de variation de f en y reportant toutes les informations obtenues et, selon les cas, ses extrema, des valeurs remarquables, ...
6. On trace l'allure de la courbe représentative de f :
   a. On trace les asymptotes à la courbe si elle existe.
   b. On place les extrema locaux avec leur tangente « horizontale » et les demies-tangentes « verticales » s'il y en a.
   c. On place quelques points essentiels : ni trop, ni trop peu et suffisamment pour donner une idée de la courbe.
   d. Le coude dans la concavité, on trace une jolie courbe, sans lever le crayon si la courbe est continue ni repasser et en s'appliquant bien à rendre **la courbe tangente aux extrema locaux**.

Contenu

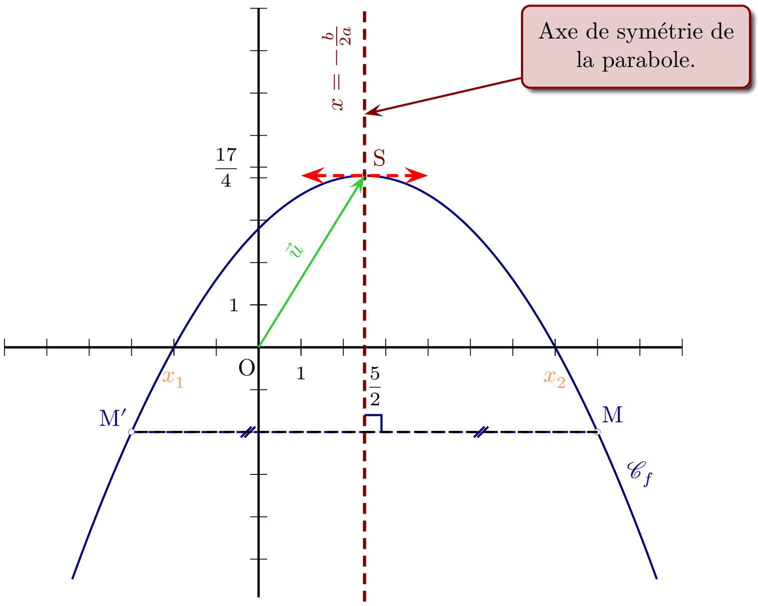


Figure V.1 – Courbe représentative de
$x \longmapsto -\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} = -\frac{1}{5}(x+2)(x-7)$.

I Les fonctions polynomiales

I.1 Généralités

Définition 1 : On appelle *fonction polynomiale* une fonction de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des réels.

Si $a_n \neq 0$,

- n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ;
- a_n est le **coefficient dominant** ;
- $a_n x^n$ est le **monôme dominant**.

On dit qu'un réel α est une **racine** (ou un **zéro**) de la fonction polynomiale lorsque $f(\alpha) = 0$.

Exemples 1 :

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax + b$ sont dites *affines*.
- Le produit de deux fonctions affines est un polynôme du second degré appelé aussi *trinôme*. Leur courbe est une *parabole*.

Dans le cas où $a \neq 0$, on a :

$$x \longmapsto \underbrace{ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta}_{\text{Forme canonique}} \qquad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-ac}{4a}.$$

$$\begin{aligned} &= a(x-x_1)(x-x_2) && \text{si } \Delta = b^2-ac > 0 \text{ avec } x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= a(x-x_0)^2 && \text{si } \Delta = 0 \text{ avec } x_0 = \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Forme factorisée

- Les fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ne sont pas polynomiales.

x	$-\infty$	x_1	$-\dfrac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$2ax+b$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Figure V.2 – Tableau de variation d'un trinôme du second degré $x \longmapsto ax^2+bx+c$ dans le cas où $a > 0$ et $\Delta > 0$.

I.2 Racines et factorisation

Théorème I (Admis pour l'instant) :

- Une fonction polynomiale de degré $n > 0$ a au plus n racines distinctes.
- Soit f une fonction polynomiale de degré $n > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

  a est une racine de f si, et seulement si on peut factoriser $f(x)$ par $(x-a)$.

Autrement dit, a est une racine de f polynomiale de degré n si, et seulement si il existe une fonction polynomiale Q (de degré $n-1$) telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x).$$

Méthode 2 (Factoriser un polynôme) :
Connaissant une racine d'un polynôme, il y a deux méthodes essentielles pour factoriser un polynôme connaissant une racine :

1. Par identification.
2. Par division euclidienne.
3. Par l'algorithme de Hörner [1], que nous verrons plus tard.

[1]. William George Hörner (Bristol, Angleterre, 9 juin **1786** - Bath, Angleterre, 22 septembre **1837**) est un mathématicien britannique.

Exemple 2 (Division euclidienne) : Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ dont 1 est racine.

Effectuons la division euclidienne de f par $x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
1x^4 & + & 5x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & x-1 \\
-(x^4 & - & x^3) & & & & & & & \overline{1x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \\
\hline
 & & 6x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & -(6x^3 & - & 6x^2) & & & & & \\
 & & & & 11x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & & & -(11x^2 & - & 11x) & & & \\
\hline
 & & & & & & 6x & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6x & - & 6) & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$\text{On obtient donc, } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$$

Et l'on peut poursuivre...

$$
\begin{aligned}
&= (x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) \\
&= (x-1)(x+1)(x+2)(x+3).
\end{aligned}
$$

Exercice 1 : Factoriser les expressions suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$A(x) = (x-3)^2 - 16$ $\qquad$ $B(x) = x^3 - 1$

I.3 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 2 :

- Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction polynomiale de coefficient dominant a_n.

  Alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = signe(a_n) \times \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n$.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction polynomiale est celle de son monôme de plus haut degré.

Preuve : Il suffit pour cela de factoriser par le monôme prépondérant (avec $a_n \neq 0$) et d'écrire :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\
&= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).
\end{aligned}
$$

Les théorèmes sur les sommes et produits de limites suffisent à conclure.

Exercice 2 : Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions polynômiales définies par :

Hörner est connu pour sa méthode (déjà publiée par Zhu Shijie vers 1300, mais aussi utilisée (en Angleterre par Isaac Newton 150 ans avant Hörner), qui permet d'évaluer rapidement un polynôme en un point et pour son invention en 1834 du zootrope, un appareil optique donnant l'illusion du mouvement.

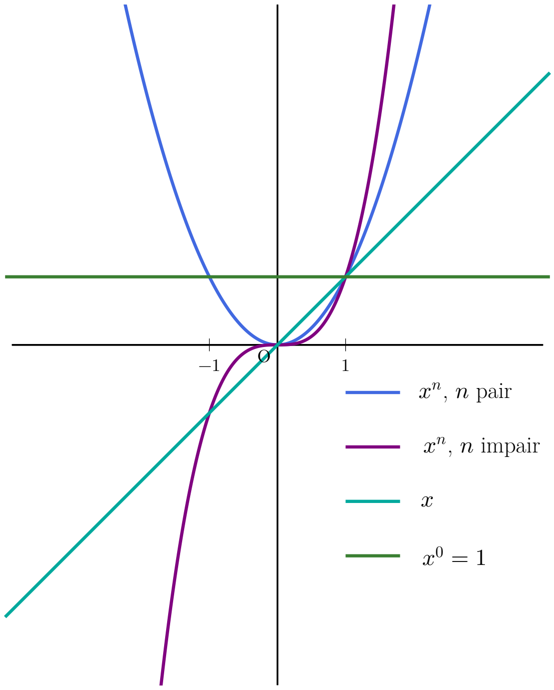


Figure V.3 – Limites en l'infini des fonctions $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$f_1(x) = x^2 + 3x - 5$

$f_2(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2x + 1.$

$f_3(x) = 3x^6 - x^4 + 2x + 3.$

$f_4(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2.$

II Les fonctions rationnelles

II.1 Généralités

Définition 2 : On appelle *fonction rationnelle* tout quotient de fonctions polynomiales de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et $b_0, b_1, \cdots, b_m$ sont des réels.

- Les racines du numérateur sont toujours appelées les racines de f.
- Les racines du dénominateur sont appelées les *pôles* de f.
- Si $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on prolonge la notion de degré d'un polynôme aux fractions rationnelles en posant : $\deg(f) = n - m$.

Remarque : Une fraction rationnelle aura au plus autant d'asymptotes verticales que ce qu'elle a de pôles.

Exemple 3 : On appelle fonction *homographique* toute fonction rationnelle définie par le quotient de deux fonctions affines $x \longmapsto ax + b$ et $x \longmapsto cx + d$ non proportionnelles *i.e.* $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c}}{cx+d}.$$

- Sa courbe, appelée *hyperbole* (équilatère [2]), admet deux asymptotes d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ dont le point d'intersection est le centre de symétrie de la courbe.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$-$	||	$-$
f	$\frac{a}{c} \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow \frac{a}{c}$

Figure V.4 – Tableau de variation d'une fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dans le cas où $ad - bc < 0$ et $c \neq 0$.

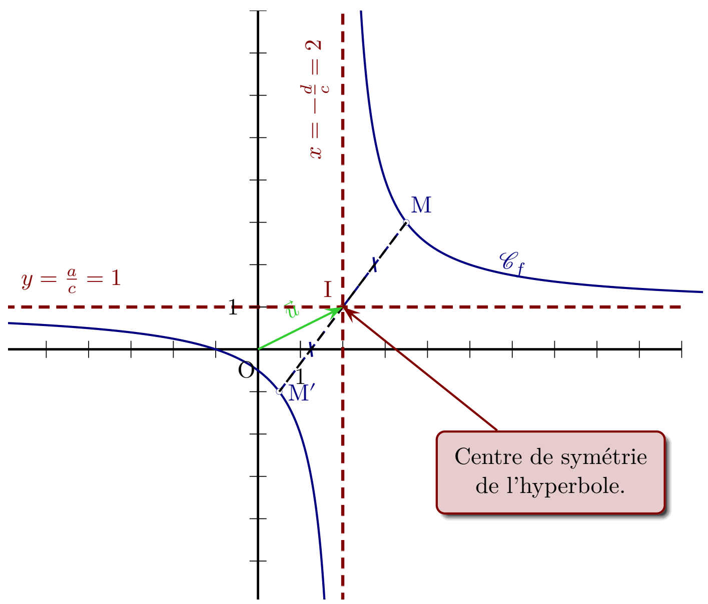


Figure V.5 – Courbe représentative de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

II.2 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 3 :

- Les fonctions rationnelles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ privé de leurs pôles.
- Soit f une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ de degré $r = n - m \in \mathbb{Z}$ et $b_m \neq 0$.

  Alors $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = signe\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times \lim_{x\to\pm\infty} x^r$.

[2]. Hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Remarque : Une fraction rationnelle admet une asymptote horizontale si, et seulement si son degré est négatif ou nul et, dans ce cas, son équation est $y = 0$ ou $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ respectivement.

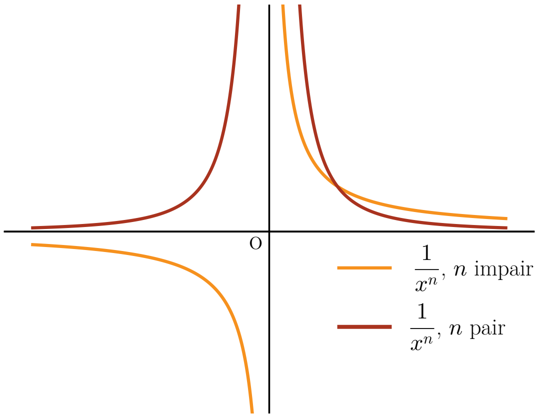


Figure V.6 – Limite en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{-x^2+x+6}$

III La fonction logarithme népérien

L'invention de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle.

La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII^e siècle du nom de John Napier avant qu'il soit anobli et prenne celui de John Néper. Il cherchait une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers.

Se basant sur les travaux déjà effectués sur les fonctions trigonométriques, il inventa alors une fonction qui transforme le produit en somme *i.e.*

$$\forall\ (a\,;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad f(ab) = f(a) + f(b). \tag{V.1}$$

C'est cette fonction, écho à la fonction exponentielle, qui est l'objet de ce paragraphe.

Remarque : L'approche consistant à développer d'abord la fonction exponentielle se vaut tout autant sachant que toutes deux souffrent, pour l'instant, d'un postulat :

— l'existence d'une fonction f vérifiant les axiomes $f' = f$ et $f(0) = 1$ si l'on veut commencer par l'exponentielle.

— l'existence de la primitive d'une fonction continue si l'on veut commencer par le logarithme népérien.

J'ai donc choisi une approche qui suit le fil de l'histoire et qui vous changera de l'approche standard que vous avez sûrement eue.

III.1 Le logarithme est défini pour tout x strictement positif

Rappel I : La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\ln} =]0\,;+\infty[\,.}$$

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \ln(5x-3)$ $\quad f_2 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{1-x}\right)$ $\quad f_3 : x \longmapsto \ln(x^2-2x+1)$

III.2 Le logarithme est strictement croissant

Théorème 4 :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(|x|)$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
Ce résultat a déjà été établi pour $x > 0$, et il reste valable pour $x < 0$ car on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

En conséquence, $x \longmapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

On récupère déjà toute une série de relations à connaître :

Corollaire 4.1 : Soient a et b deux réels **strictement positifs**.

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.
- $\ln(a) = 0 \iff a = 1$ et $\ln(a) > 0 \iff a > 1$.

Exemple 4 : Résoudre $\ln(2-2x) = \ln 2$.
Tout d'abord les conditions d'existence. Cette équation ne sera valide que si $2-2x > 0$ *i.e.* $x \in]-\infty\,;1[$.
Il suffit alors de résoudre en appliquant les propriétés ci-dessous :

$$\ln(2-2x) = \ln 2 \iff 2-2x = 2 \iff x = 0.$$

Comme $0 < 1$, on a $\mathscr{S} = \{0\}$.

III.3 Composée

Théorème 5 : Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Comme u est nécessairement positive, le signe de $\left(\ln u\right)'$ est le même que celui de u' *i.e.* les fonctions $\ln u$ et u ont le même sens de variations sur I. [3]

En mieux, ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, composée par elle ne change pas la monotonie.

Exemple 5 : La fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$ a les mêmes variations que $x \longmapsto 1 + x^2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

III.4 Le logarithme transforme les produits en sommes

Proposition 6 (Propriétés algébriques) : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{Q}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

La relation 1 est appelée *relation fondamentale* du logarithme. Elle va imposer une croissance très, très, très faible.

En particulier, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x).}$

Preuve :

– Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln(bx) - \ln(x) - \ln(b).$$

Cette fonction est constante à $f(1) = 0$.

En évaluant en a, on obtient la relation cherchée.

– $\ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

[3]. Attention ! Elles peuvent ne pas avoir et n'ont surement pas le même domaine de définition.

– $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots$.

– On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ ce résultat sachant qu'il est initialisé pour $n = 0$.

$$\ln\left(a^{n+1}\right) = \ln\left(a^n\right) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a).$$

D'où l'hérédité et la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\ln\left(a^n\right) = -\ln\left(a^{-n}\right)$, on étend ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$.

Enfin, soit $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\ln\left(a^n\right)^q = nq\ln\left(a\right)$ d'une part car $nq \in \mathbb{Z}$ et $\ln\left(a^n\right)^q = q\ln\left(a^n\right)$ d'autre part car $a^n \in \mathbb{R}_+^*$.

Une petite division par $q \neq 0$ et on obtient $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

La formule est ainsi prolongée à tout $n \in \mathbb{Q}$.

Exemples 6 :

1. $\ln 50 = \ln\left(5^2 \times 2\right) = 2\ln 5 + \ln 2$.
2. $\ln\sqrt{12} = \frac{1}{2}\ln\left(2^2 \times 3\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3$.

   Ces deux premiers exemples montrent, qu'à l'époque bénie où les calculatrice n'existaient pas, une simple table avec les valeurs approchées des logarithmes des 10 premiers entiers suffisait à faire bien des calculs !
3. Déterminons l'entier n tel que $2^n > 10000$.

$$2^n > 10000 \underset{\ln \text{ str. croissante}}{\iff} n\ln 2 > \ln(10000) = 4\ln(10) \iff n > 4\frac{\ln(10)}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0\,!.$$

Comme $4\frac{\ln(10)}{\ln 2} \simeq 13,3$, l'entier n devra être supérieur à 14.

Corollaire 6.1 : Pour tout réels strictement positifs, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{b_1b_2\dots b_m}\right) &= \ln(a)_1 + \ln(a)_2 + \dots + \ln(a)_n - \ln(b)_1 - \ln(b)_2 - \dots - \ln(b)_m \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(a)_k - \sum_{k=1}^{m}\ln(b)_k.\end{aligned}$$

Cette propriété est souvent utilisée pour linéariser les expressions.

Exemple 7 : L'image d'une suite géométrique par la fonction logarithme est une suite arithmétique.

En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_0 *i.e.*

$$\begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = qu_n. \end{cases}$$

Alors $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln q$. La suite $\left(\ln u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $\ln u_0$.

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

III.5 Le logarithme réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

En particulier, l'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe de ln en 0^+.

Preuve :

– La fonction ln est croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone que nous verrons plus tard, ou bien elle admet une limite finie L en $+\infty$, ou bien elle tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$.

Or, comme ln est strictement croissante, $\ln(1) = 0$ impose $\ln 2 > 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$.

La fonction ln ne peut donc être majorée et le résultat.

– Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

D'où,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \underset{u=\frac{1}{x}}{=} -\lim_{u\to+\infty} \ln(u) = -\infty.$$

Théorème 8 : La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Comme la fonction ln est continue (car dérivable) et strictement monotone sur $]0\,;+\infty[$, d'après le théorème du même nom, elle réalise donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\ln(]0\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$.

En particulier, 1 admet un unique antécédent par ln, noté e :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e} \simeq 2,71828.$$

III.6 Le logarithme est dominé par les fonctions polynômes

Théorème 9 (Croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

On aura bien mieux avec la proposition (21) .

Preuve : Commençons par montrer ces résultats pour $n = 1$:

– On étudie la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier sur $[1\,;+\infty[$ où elle y est décroissante car :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \leqslant 0.$$

Comme $f(1) = -2$, la fonction f ne prend que des valeurs négatives et on obtient :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient le résultat cherché d'après le théorème d'encadrement.

– Un petit changement de variable $u = \frac{1}{x}$ donne le résultat :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \underset{u=\frac{1}{x}}{=} -\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ **fixé**. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x^n}}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u^{\frac{1}{n}}}{u} = \frac{1}{n} \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Le raisonnement est identique pour $\lim\limits_{u\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

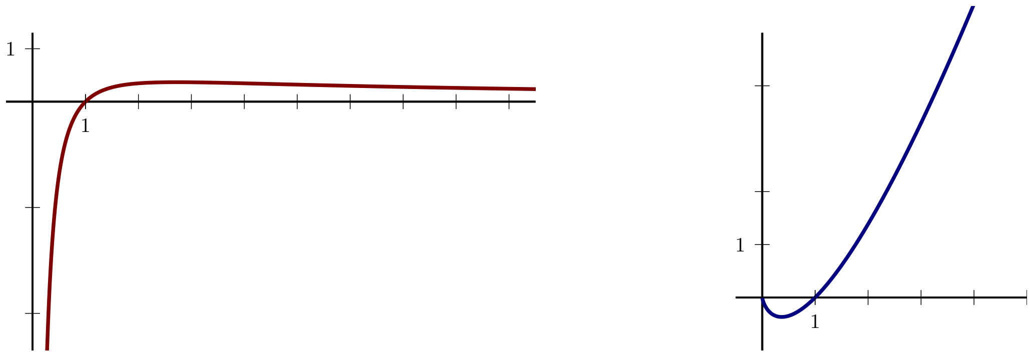


Figure V.7 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et $x \longmapsto x\ln(x)$.

Au voisinage des bornes, la fonction ln est « écrasée » par les fonctions polynômes qui lui imposent leur limite.

Exemple 8 : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$

III.7 Le logarithme est au-dessous de ses tangentes

Proposition 10 (Tangentes) :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$
- $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1.$

Preuve :

– On reconnait un taux d'accroissement. Comme la fonction $\ln$ est dérivable en 1, on a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-\ln 1}{x-1}=(\ln)'(1)=\left(\frac{1}{x}\right)(1)=1.$$

À partir de la limite précédente, on pose $h=1+x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{h=1+x}{=}\lim_{h\to 1}\frac{\ln(h)}{h-1}=1.$$

– La fonction $\varphi : x\longmapsto \ln(x)-(x-1)$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ où l'on a $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
φ	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

La fonction φ admet donc 0 comme maximum.

En particulier, $\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\quad \ln(x)\leqslant x-1.$

Remarque : Par une petite translation, on obtient du même coup que, pour tout $x\in\,]-1\,;+\infty[$,

$$\ln(1+x)\leqslant x.$$

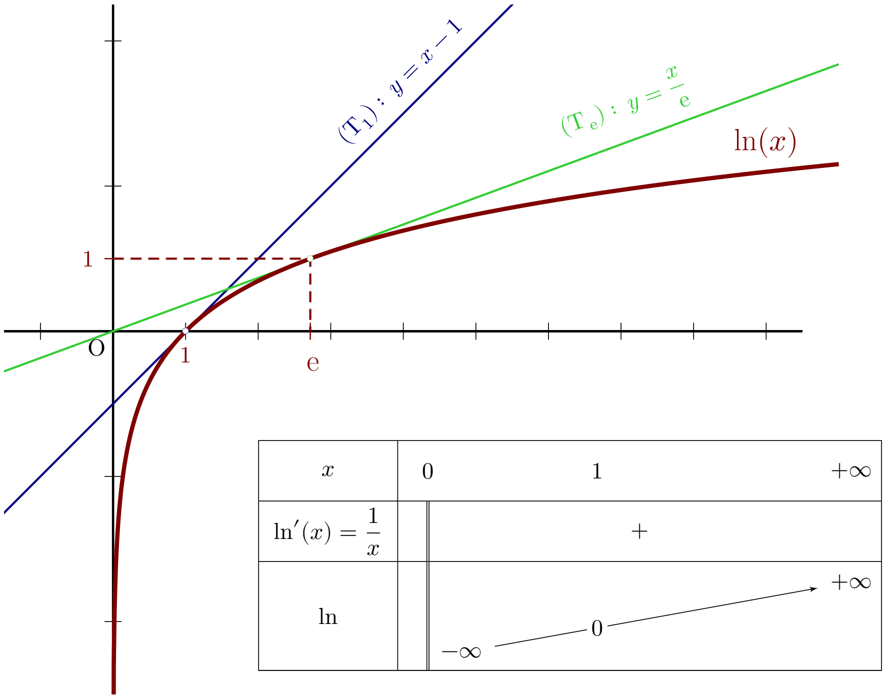
III.8 Courbe représentative

D'après les sections précédentes, on déduit le tableau de variations de $x\longmapsto \ln(x)$ à partir du signe de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

On peut alors tracer sa courbe représentative (V.8) ainsi que [4] son asymptote et sa tangente en 1 d'équation :

$$(\mathrm{T}_1) :\ y=x-1.$$

[4]. Les asymptotes et les tangentes avant la courbe !!!



x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	+	
$\ln$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

Figure V.8 – Courbe représentative de $x \longmapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.

IV LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

À la toute fin du XIX$^\mathrm{e}$siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs comme l'uranium, le polonium et le radium.

Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence. Partant d'une quantité initiale N_0, si on désigne par $\mathrm{N}(t)$ la quantité d'atomes de radium à l'instant t et $\mathrm{N}'(t)$ la variation de celle-ci alors on peut montrer que cette variation à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présents :

$$\begin{cases} \mathrm{N}(0) & = \mathrm{N}_0 \\ \mathrm{N}'(t) & = -k\mathrm{N}(t). \end{cases}$$

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant t le nombre d'atome $\mathrm{N}(t)$. Ceci est, par exemple, appliqué pour la datation de matière organique au carbone 14 qui est un isotope radioactif du carbone : connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'a pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

La quantité $\mathrm{N}(t)$ est donc solution de l'équation différentielle[5] $f' = -kf$, ou, sous sa forme simplifiée :

$$\boxed{f' = f.} \tag{V.2}$$

La fonction que nous cherchons est une *solution particulière* de cette équation…

[5]. Une équation liant une fonction à sa dérivée (sa différentielle).

IV.1 L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc envisager sa fonction réciproque.

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de ln, notée exp telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} \exp y = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{array}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.} \tag{V.3}$$

Rapidement, en utilisant la définition d'une fonction réciproque, on obtient :

Théorème II :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Exercice 6 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$f_1 : x \longmapsto \ln(1 - e^x)$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x-2} - 2}$ $\qquad$ $f_3 : x \longmapsto \sqrt{5 - e^x}$

Corollaire II.1 : Dans un repère orthonormal, les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Preuve : Notons respectivement $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point de $\mathscr{C}_{\ln}$ i.e. $y = \ln(x)$ avec $x \in]0\,;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$. Par définition, on a aussi $x = \mathrm{e}^y \iff \mathrm{M}'(y\,;x)$ est un point de $\mathscr{C}_{\exp}$. Les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ se déduisent donc l'une de l'autre par une symétrie d'axe la première bissectrice d'équation $y = x$.

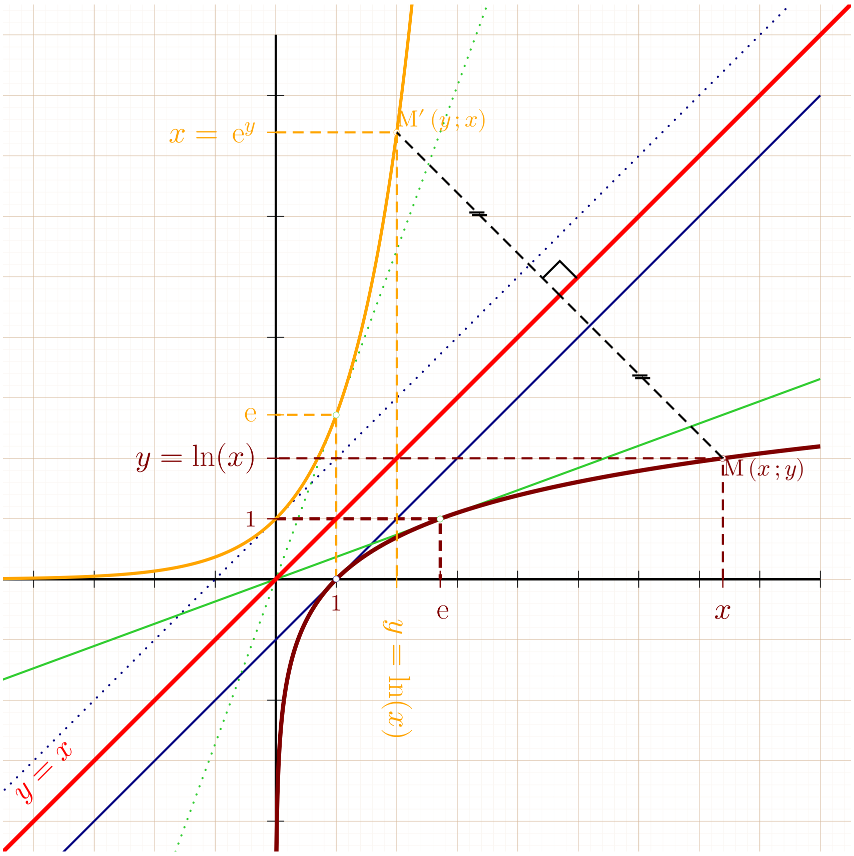


Figure V.9 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

IV.2 L'exponentielle est strictement croissante

Théorème 12 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left(\exp\right)'(x) = \exp(x). \tag{V.4}$$

Preuve :

– Il est inutile d'utiliser la dérivée pour montrer que exp est strictement croissante. Les propriétés des fonctions réciproques d'une fonction strictement croissante suffisent.

– La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ est bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable et dont la dérivée $\ln' : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \neq 0$ ne s'annule pas.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, exp est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\exp\right)'(x) = \frac{1}{\ln'\left(\exp(x)\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= f(x) \end{cases} \tag{V.5}$$

Remarque 1 : Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.5) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve : En effet, soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. Montrons que φ est constante sur $\mathbb{R}$.
Comme produit de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x).$$

Or, $f' = f$.

$$= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$. La fonction f ne peut s'annuler et on a la propriété supplémentaire :

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}. \tag{V.6}$$

Remarque 2 : Il n'existe qu'une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.5).

Preuve : En effet Supposons qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant les conditions $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$.
Comme g ne s'annule pas d'après la remarque précédente, on peut définir la fonction h par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sous les hypothèses $f' = f$ et $g' = g$, on a :

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{h} = 0.$$

La fonction h est donc constante à $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$ i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

L'unicité est ainsi prouvée.

Corollaire 12.1 : Soient a et b deux réels.

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$.
- $\exp(a) = 1 \iff a = 0$ et $\exp(a) > 1 \iff a > 0$.

IV.3 L'exponentielle transforme les sommes en produits

Proposition 13 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594\ldots$$

Soient $a,\, b \in \mathbb{R}$.

- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$ et $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.

Preuve : On démontre le premier point. Les autres s'en déduisent aisément. On s'appuie, pour cela, sur la définition de exp.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. La fonction $\ln$ étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, il existe deux uniques réels strictement positif x et y tels que $a = \ln(x)$ et $b = \ln y$ i.e. , de manière équivalente, $x = \exp(a)$ et $y = \exp(b)$.

On a alors :

$$\exp(a+b) = \exp\big(\ln(x) + \ln y\big) = \exp\big(\ln(xy)\big) = xy = \exp(a) \times \exp(b).$$

Remarques :

— Pour tout rationnel r, la dernière propriété s'écrit $\exp(r) = \exp(1.r) = \big(\exp(1)\big)^r = \mathrm{e}^r$. On étend alors cette expression à tout réel x, en posant :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x.}$$

— Grâce à ces propriétés, on peut montrer de manière très élégante :

1. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 = \exp 0 = \exp(x-x) = \mathrm{e}^x \times e^{-x} \implies \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \neq 0.$$

En particulier, $\exp(x)$ est inversible dans $\mathbb{R}$ pour tout x.

2. que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0.$$

On retrouve alors le résultat de (V.3).

Exercice 7 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x + 30\,\mathrm{e}^{-x} = 17$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(17x-30)$.

IV.4 L'exponentielle est prépondérante sur les polynômes

Théorème 14 :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$.

En particulier, l'axe des abscisses est *asymptote* à la courbe en $-\infty$.

Preuve :

– On va utiliser les théorème de comparaison, en étudiant la fonction φ définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on a $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

La fonction exp est strictement croissante et on a $\mathrm{e}^0 = 1$ d'où le signe de la dérivée et le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation, on en déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > x$.

D'après le théorème de comparaison, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

– Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}} = 0^+$.

Théorème 15 (Croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$ [6].

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynômes en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0^-$ exprime que l'exponentielle est prépondérante sur $\dfrac{1}{x^n}$ en $-\infty$.
Ces considérations auront des conséquences sur la représentation graphiques et il faudra bien donner l'impression que la courbe « monte ou descend » très vite.

Remarque : On aura bien mieux avec la proposition (21) .

Preuve : On commence par démontrer ce résultat pour $n = 1$.

[6]. Si nécessaire, on peut affiner un peu suivant la parité de n : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

– L'idée est la même que pour la démonstration du théorème (14). On compare cette fois $\exp(x)$ à $\dfrac{x^2}{2}$ en posant ψ la fonction définie par $\psi(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$ clairement dérivable sur $\mathbb{R}$.[7]

  On a $\psi'(x) = \mathrm{e}^x - x = \varphi(x) > 0$ d'après la démonstration du théorème (14) donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et minorée par $\psi(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

  On en déduit que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2} \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

– Enfin, pour la deuxième limite, on se ramène à la précédente par un changement de variable judicieux :

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} -\mathrm{X}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}} = -\frac{1}{\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}}} = 0.$$

– Considérons alors $n \in \mathbb{N}$ **fixé**, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n \underset{u=\frac{x}{n}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^u}{nu}\right)^n = \frac{1}{n^n} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^u}{u}\right)^n = +\infty.$$

  On montre de même la dernière proposition : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0^-$.

En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0^-$.

Exemple 9 : Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \mathrm{e}^{-x}$.

On a $x + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} + 1\right) = \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^x + 1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$, d'après les théorèmes sur les sommes de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,\mathrm{e}^x + 1) = 1$ puis, d'après les théorèmes sur les produits de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^x + 1) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} \times 1 \underset{u=-x}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty.$$

Exercice 8 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\,(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

[7]. À cause du quotient par x, comparer e^x à x n'est plus suffisant. Le « $\dfrac{1}{2}$ » n'est là que pour simplifier les calculs.

IV.5 L'exponentielle est au-dessus de ses tangentes

Théorème 16 :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1.$

Comme pour le logarithme, la première assertion exprime que la fonction exp se comportent comme la fonction $x \longmapsto x+1$ [8] au voisinage de 0.

Preuve :

1. On reconnaît un taux d'accroissement d'une fonction dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = (\exp)'(0) = e^0 = 1.$$

2. La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x - (x+1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ où l'on a $\varphi'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction φ admet donc 0 comme minimum.

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1.$

Remarque : Avec la convexité qui n'est pas au programme, on aurait directement ce résultat.

IV.6 Courbe représentative

[8]. Sa tangente en 0 donc.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$				$+$			
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

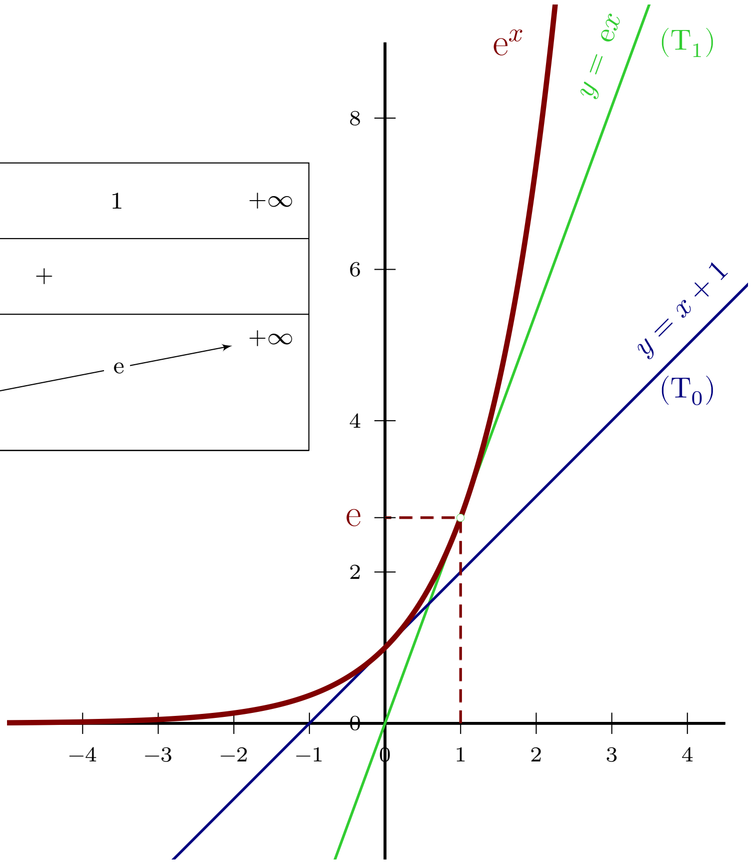


Figure V.10 – Courbe représentative de $x \longmapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.

IV.7 Composée

Proposition 17 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u' \times \mathrm{e}^u.$$

Exercice 9 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée des fonction définies par :

$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad$ $f_2(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ $\qquad$ $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)$

V Les fonctions puissances

Lorsque n n'est plus entier, la notation $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$, introduite en 4ᵉ ne suffit plus. En effet, que penser de $2^{\frac{5}{3}}$, 3^π ou $7^{\sqrt{2}}$?

Lorsque n est un entier (et a strictement positif),

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \ldots \times e^{\ln(a)}}_{n \text{ fois}} = \mathrm{e}^{\overbrace{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)}^{n \text{ fois}}} = \mathrm{e}^{n \ln(a)}.$$

V.1 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Définition 5 (Exponentielle de base a) : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x, on pose :

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.$$

On retrouve alors la définition du collège. Cette notation est donc bien cohérente. Cela ne s'arrête pas là puisque l'on récupère aussi toutes les propriétés des puissances entières comme nous le verrons à la proposition (18)

Remarque : $a > 0$ s'impose par le fait que figure $\ln(a)$ dans l'expression.

Exemples 10 : À la calculatrice, on obtient :

- $2^{\frac{5}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\ln 2} \simeq 3,2$
- $3^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi\ln 3} \simeq 31,5$
- $7^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln 7} \simeq 15,7$

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a)\times a^x$		$+$	
a^x	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a)\times a^x$		$+$	
a^x	$+\infty$	$\searrow 1 \searrow$	0

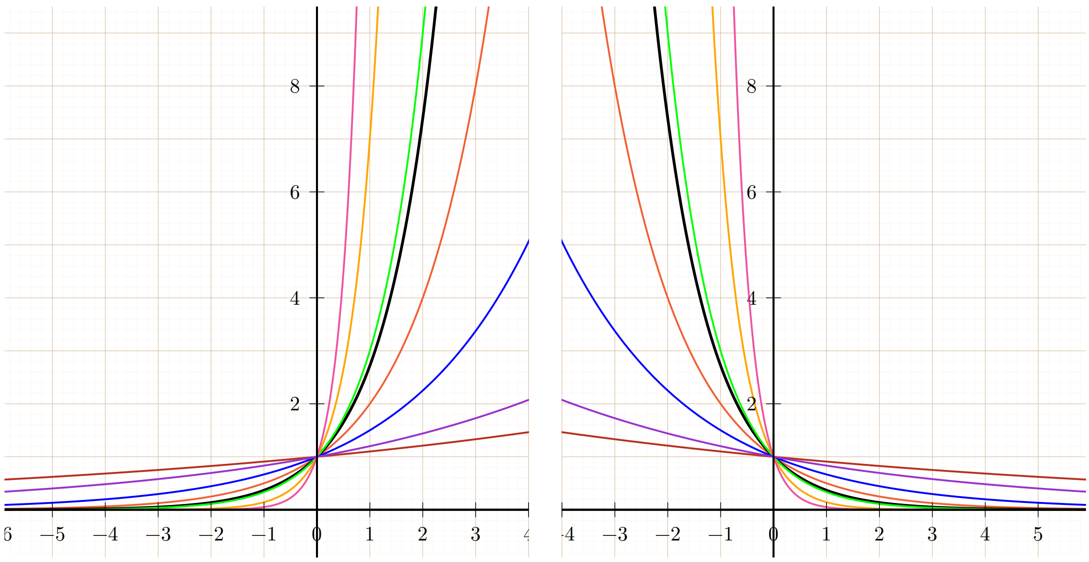


Figure V.11 – La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \longmapsto a^x$.

Exercice 10 : Simplifier les écritures suivantes :

1. $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$.
2. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$
3. $27^{\frac{5}{3}}$

Proposition 18 (Propriétés algébriques) : Pour tous réels a et b strictement positifs et quels que soient les réels r et s, on a :

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$
2. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^r \times b^r = (ab)^r$
5. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

La relation 5 est une généralisation de la relation 4 de la proposition (6) .

Preuve : Il suffit d'écrire et d'utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme que l'on connaît :

1. $a^r \times a^s = \mathrm{e}^{r\ln(a)} \times \mathrm{e}^{s\ln(a)} = \mathrm{e}^{(r+s)\ln(a)} = a^{r+s}$.
2. $a^{-r} = \mathrm{e}^{-r\ln(a)} = \mathrm{e}^{-\ln(a^r)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{r\ln(a)}} = \dfrac{1}{a^r}$.
3. $(a^r)^s = \mathrm{e}^{s\ln\left(\mathrm{e}^{r\ln(a)}\right)} = \mathrm{e}^{sr\ln(a)} = a^{rs}$.
4. $a^r \times b^r = \mathrm{e}^{r\ln(a)} \times \mathrm{e}^{r\ln(b)} = \mathrm{e}^{r\ln(ab)} = (ab)^r$.
5. $\ln(a^r) = \ln\left(\mathrm{e}^{r\ln(a)}\right) = r\ln(a)$.

Méthode 3 :
Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, u à valeur strictement positive, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle $\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ pour en simplifier l'étude.

ATTENTION La définition (5) permet donc de prolonger les propriétés de a^n en remplaçant $n \in \mathbb{Z}$ par $x \in \mathbb{R}$ ce qui est bien mais ce prolongement a un prix à payer : a doit nécessairement être strictement positif. On ne peut pas tout avoir !

V.2 Fonction puissance réelle

Définition 6 : Pour tout réel α et tout réel x strictement positif, on pose :

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}.$$

Remarque : Comme pour la partie précédente, la présence de ln restreint le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ à $\mathbb{R}_+^*$. Ce n'est donc qu'un prolongement **partiel** des fonctions polynômiales x^n ou rationnelles $\dfrac{1}{x^n}$ que vous connaissez.

Exercice 11 : Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants :

1. 3^{-x}
2. x^2
3. $\sqrt{x}$
4. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$
5. x^x
6. x^{x^x}

Théorème 19 : Soit α un réel fixé.
La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Remarque : Nouvelle preuve de la cohérence de cette notation, on retrouve ici encore la dérivée d'une fonction polynôme lorsque n est entier : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Preuve : *La fonctions* $\ln$ *est définie et dérivable de* $]0\,;+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$*, la fonction* $\exp$ *l'est sur* $\mathbb{R}$*. Par composition, la fonction* $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ *est donc définie et dérivable sur* $]0\,;+\infty[$ *et on a, d'après les formules de dérivation d'une fonction composée :*

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}\right)' = \frac{\alpha}{x} \times \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} \times x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Le signe de la dérivée dépend donc de celui de α.

Proposition 20 : Soit α un réel fixé.

$\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

$\alpha < 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0$.

Prolongement par continuité : Dans le cas, $\alpha > 0$, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$, on peut prolonger la fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ en 0 en posant naturellement $0^{\alpha} = 0$.

On dit alors que l'on a *prolongé la fonction puissance par continuité* en 0.

Cette nouvelle fonction puissance qui coïncide avec l'ancienne sur $]0\,;+\infty[$ est alors définie sur $[0\,;+\infty[$. On les confondra désormais.

Cas $\alpha > 0$ ($\alpha \in]0\,;1[$) **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$+$	
x^{α}	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$ **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$-$	
x^{α}	‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0

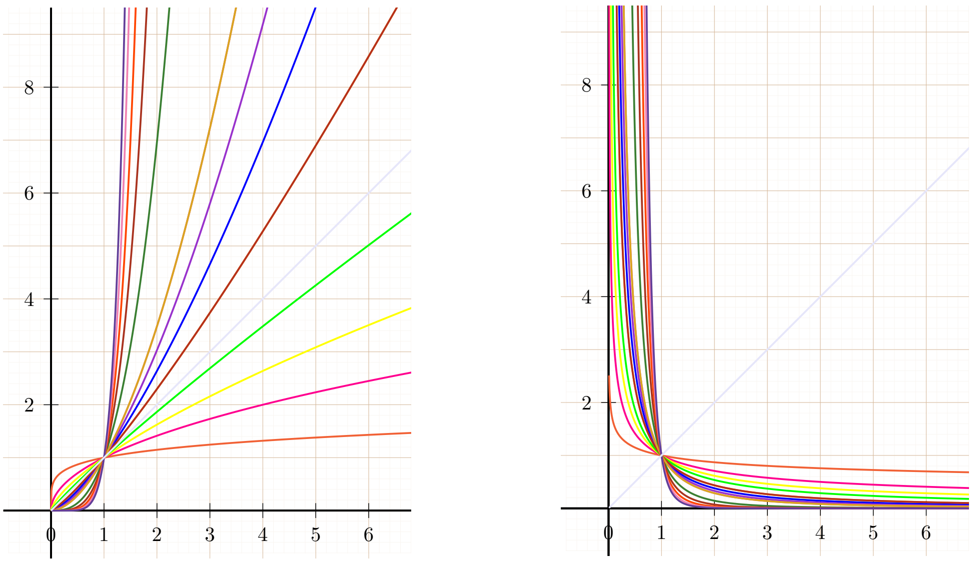


Figure V.12 – Les fonction puissances $x \longmapsto x^{\alpha}$.

ATTENTION Pour $\alpha \in]0\,;1[$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, signe qu'elle N'est PAS dérivable en 0. C'est typiquement ce qui arrive à la fonction racine carrée.

Réciprocité : Pour tout réel α non nul et tout $x > 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ réalise une bijection [9] de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f admet donc une fonction réciproque définie sur $[0\,;+\infty[$ que l'on vérifiera coïncider avec la fonction :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & [0\,;+\infty[\\ x & & x^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}$$

Enfin, comme pour les courbes de ln et exp, les courbes des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

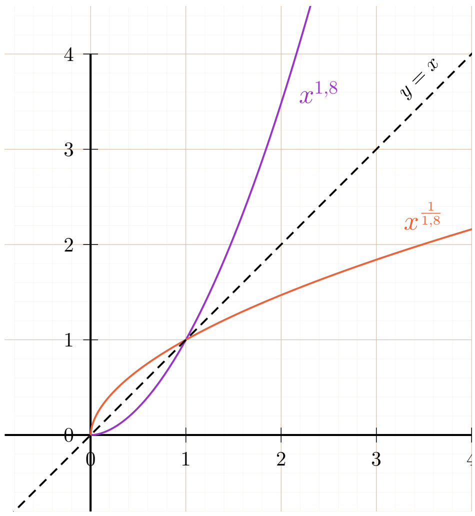


Figure V.13 – Les courbes représentatives de $x \longmapsto x^\alpha$ et de sa réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction racine n-ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n-ième*, la réciproque de $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt[n]{\ } : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & [0\,;+\infty[\\ x & & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

De plus, on remarquera que pour tout x strictement positif et $n \geqslant 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Enfin, si n est impair, on prolonge la définition à $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement *asymptotique* des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. On parle de croissances comparées

Proposition 21 (Croissances comparées) : Pour tous α, β strictement positifs.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$

[9]. son prolongement plutôt

Preuve : On s'appuie sur $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ que l'on connaît déjà.

– Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^\alpha}{x^\beta}=\left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha=\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\big(\ln(x)\big)^\alpha}{x^\beta}\underset{u=x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\dfrac{\ln u}{u}=0.$

– $\lim\limits_{x\to0^+}x^\beta\big|\ln(x)\big|^\alpha\underset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\big(\ln u\big)^\alpha}{u^\beta}=0.$

– $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}=\mathrm{e}^{\alpha x-\beta\ln(x)}=\mathrm{e}^{\left(a-\beta\frac{\ln(x)}{x}\right)x}$ qui ne pose aucun soucis avec les théorèmes sur les limites.

– $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^\beta\,\mathrm{e}^{\alpha x}\underset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^{\alpha u}}{u^\beta}}=0.$

Remarque : Ces résultats nous permettent d'avoir en tête un « classement » des prépondérances en $+\infty$:

$$\boxed{1\prec\big(\ln(x)\big)^\alpha\underset{\alpha<\alpha'}{\prec}\big(\ln(x)\big)^{\alpha'}\prec x^\beta\underset{\beta<\beta'}{\prec}x^{\beta'}\prec\mathrm{e}^x\underset{\mathrm{e}<\mathrm{f}}{\prec}\mathrm{f}^x.}$$

Exercice 12 : Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

$f_1 : x\longmapsto\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 et en $+\infty$.

$f_2 : x\longmapsto x\ln\sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$.

$f_3 : x\longmapsto\dfrac{e^{2x}}{\mathrm{e}^x+x^2}$ en $\pm\infty$.

VI La fonction logarithme décimal

Définition 7 : On appelle *logarithme décimal*, la fonction, notée log, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Le logarithme népérien est ainsi la « fonction logarithme de base e », la fonction log, celle de base 10 ». Pour tout réel $a>0$, on peut ainsi définir n'importe quel logarithme de base a que l'on note $\log_a$.

Exemple 11 (Nombre de chiffres en écriture décimale) :

Un nombre $\mathrm{N}\geqslant1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 *i.e.*

$$\exists\,p\in\mathbb{N}^*,\ /\ 10^p\leqslant\mathrm{N}<10^{p+1}\qquad i.e.\ \mathrm{N}\text{ possède }p+1\text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction log est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{aligned} \log 10^p &\leqslant \log \mathrm{N} < \log(10)^{p+1} \\ p &\leqslant \log \mathrm{N} < p+1. \end{aligned}$$

On a donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de N est donc : $\mathrm{E}(\log \mathrm{N}) + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2024^{2025}\right) \simeq 6695,1$. Le nombre 2024^{2025} s'écrit avec 6696 chiffres !

Un autre, $\log(46!) \simeq 57,76$. On en déduit que $46!$ est un nombre à 58 chiffres !

Proposition 22 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \log\left(10^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ 10^{\log(x)} = x.$$

$\log(10) = 1$ et, d'une manière générale $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\log(10)^n = \dfrac{\ln(10)^n}{\ln(10)} = n \times \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = n$.

Mieux, la fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel x, associe $\mathrm{e}^{x\ln(10)} = 10^x$.

Exercice 13 : Montrer que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 23 :

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad$ et $\quad \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \log\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log(y)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\quad \log(x^n) = n\log(x) \quad$ et $\quad \log(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\log(x)$.

Comme $\ln(10) > 0$, les fonctions $\log = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \ln$ et ln ont les mêmes variations et les mêmes limites.

Proposition 24 : La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

Exercice 14 : Exprimer en fonction de $\log(2)$ les nombres suivants :

1. $\log(20)$
2. $\log(2000)$
3. $\log(0,008)$
4. $\log(1,024)$
5. $\log\left(\dfrac{1}{0,00064}\right)$
6. $\log\left(1,28 \times 2^{27}\right)$

Parfois, on utilise des unités logarithmiques, c'est-à-dire dont la valeur est le logarithme du rapport entre deux valeurs (v_{min} et v_{max}) d'une grandeur. La base logarithmique choisie dépend des habitudes de la discipline qui les utilisent :

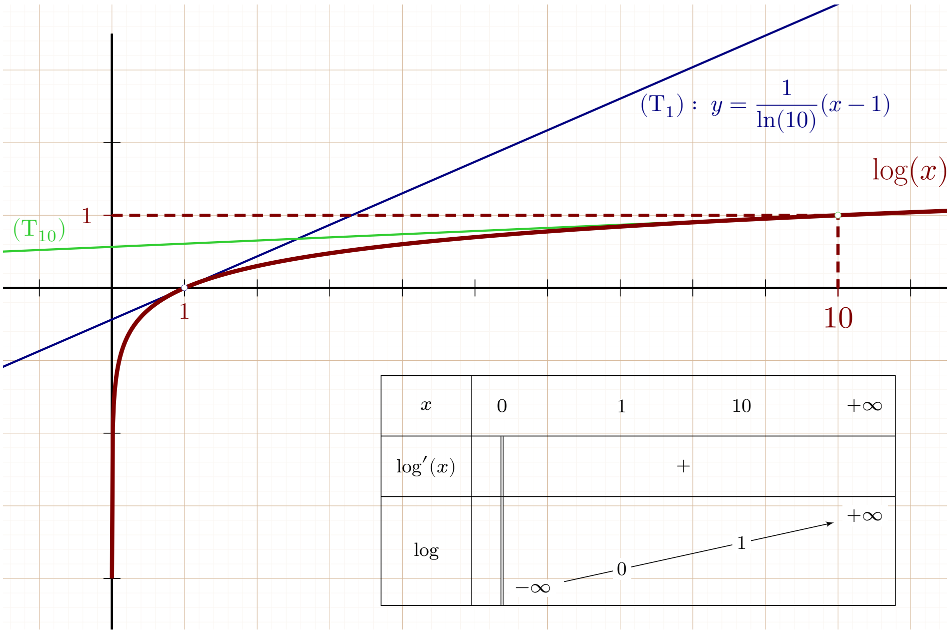


Figure V.14 – Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \log(x)$ et sa tangente en 1.

— le logarithme népérien, dont la base est e, facilite certains calculs, mais ne permet pas d'accéder intuitivement à l'ordre de grandeur décimal (*cf exemple 11*).

— le logarithme décimal (base 10) donne directement une notion de l'ordre de grandeur puisque la caractéristique, c'est-à-dire le signe et la partie avant la virgule, le donne directement.

Par exemple, une échelle, qui va dans la réalité de 10^{-10} à 10^{10}, sera représentée sur un axe allant de -10 à 10. Très utile en astronomie, statistiques, intensité sonore, magnitude d'un séisme, calcul du pH,...

VII LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Le premier à introduire les fonctions hyperboliques est le mathématicien et physicien italien Jacopo Riccati en 1760, dans le but d'exprimer l'aire sous une hyperbole (d'où le nom donné à ces fonctions). Ses définitions sont purement géométriques, et ne font pas référence à l'exponentielle.

C'est Jean-Henri Lambert vers 1770 qui exprime sh et ch à l'aide de la fonction exponentielle, et qui en fait une étude complète.

Plus proche de notre vie quotidienne : la forme d'un câble suspendu dans le vide entre deux points est une chaînette d'équation :

$$y = a\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{où } a > 0.$$

Cette section s'attache à étudier les fonctions hyperboliques définies comme partie paire et impaire de l'exponentielle.

Rappel 2 : Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

- On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la partie paire de la fonction exponentielle définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
- On appelle fonction *sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

En particulier et par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x).} \tag{V.7}$$

De plus, on a l'identité, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$$

Exercice 15 : Résoudre :

1. $\mathrm{ch}\,(x) = 2$.
2. $5\mathrm{ch}\,(x) - 4\mathrm{sh}\,(x) = 3$.
3. $\begin{cases} \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{ch}\,(y) = 4 \\ \mathrm{sh}\,(x) + \mathrm{sh}\,(y) = 1 \end{cases}$.

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,(x) = 2 &\iff \mathrm{e}^x - 4 + \mathrm{e}^{-x} = 0 \overset{\mathrm{e}^x}{\iff} \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 4\,\mathrm{e}^x + 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^x = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } \mathrm{e}^x = 2 - \sqrt{3} \overset{2\pm\sqrt{3}>0}{\iff} x = \ln(2+\sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{\ln(2+\sqrt{3});\ \ln(2-\sqrt{3})\right\}$.

Comme ch est strictement positive, la fonction sh sera strictement croissante.

Comme elle s'annule en 0, d'après le théorème de la bijection, elle sera donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ d'où la stricte monotonie de la fonction ch sur ces deux intervalles.

Proposition 25 (Cosinus hyperbolique) :

- $\mathrm{ch}\,(0) = 1$.
- La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.
- La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\,(x).$$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}\,(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}\,(x) - 1}{x} = 0$.

De même, on a :

Proposition 26 (Sinus hyperbolique) :

- $\mathrm{sh}\,(0) = 0$.
- La fonction sh est impaire.
- La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x).$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x} = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\,(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure V.15 – Tableaux de variation de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$.

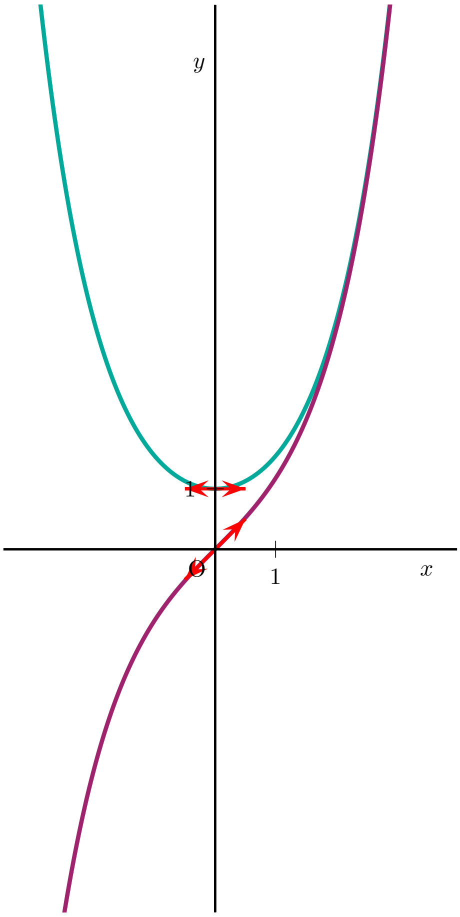


Figure V.16 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ et leur tangente en 0.

On remarquera, en particulier, que :

— Les droites d'équation $y = 1$ et $y = x$ sont respectivement tangentes en 0 aux courbes de ch et sh.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = 0$ entraîne que les courbes des cosinus et sinus hyperboliques ont même *direction asymptotique* qui est celle de $\dfrac{e^x}{2}$.

Exercice 16 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \operatorname{ch}(x)\cos(x) + \operatorname{sh}(x)\sin(x)$.
2. $g : x \longmapsto \operatorname{ch}^4(x)\operatorname{sh}^2(x)$.

VIII Tableau récapitulatif

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Domaine de définition</th><th>Domaine de dérivabilité</th><th>$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>$c \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td><td>nx^{n-1}</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in]1\,;+\infty[$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}_+$</td><td rowspan="3">$\alpha x^{\alpha-1}$</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in]0\,;1[$</td><td>$\mathbb{R}_+$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>x^α, $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$</td><td colspan="2">$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>$\ln(x)$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\mathbb{R}_+^*$</td><td>$\dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>$\log_a(x)$</td><td>$\dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td colspan="2" rowspan="4">$\mathbb{R}$</td><td>e^x</td></tr>
<tr><td>a^x, $0 < a$</td><td>$\ln(a) \times a^x$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{ch}(x)$</td><td>$\operatorname{sh}(x)$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{sh}(x)$</td><td>$\operatorname{ch}(x)$</td></tr>
</table>

Index