V

Fonctions de référence

Méthode 1 (Plan d'étude d'une fonction) :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction donnée.

1. On commence par déterminer le domaine de définition de f i.e. on ne travaille pas sur quelque chose qui n'existe pas ! D'un point de vue plus théorique. On passe de la fonction à l'application.
2. On restreint l'intervalle d'étude par parité ou périodicité si c'est le cas i.e. on ne travaille pas pour rien.
3. On détermine les limites de f au extrémités du domaine d'étude avant de les étendre au domaine de définition tout entier par symétrie ou translation.

   On effectue ici l'étude asymptotique de la fonction en dégageant les asymptotes éventuelles à la courbe.
4. On effectue l'étude locale en précisant les variations de la fonction.

   Dans le cas d'une fonction dérivable (ce que l'on justifiera) on calcule et on factorise f' afin d'en étudier le signe. On détermine également les points d'annulation de la dérivée afin d'avoir les lieux des tangentes « horizontales ».
5. On dresse le tableau de variation de f en y reportant toutes les informations obtenues et, selon les cas, ses extrema, des valeurs remarquables, ...
6. On trace l'allure de la courbe représentative de f :

   a. On trace les asymptotes à la courbe si elle existe.
   b. On place les extrema locaux avec leur tangente « horizontale » et les demies-tangentes « verticales » s'il y en a.
   c. On place quelques points essentiels : ni trop, ni trop peu et suffisamment pour donner une idée de la courbe.
   d. Le coude dans la concavité, on trace une jolie courbe, sans lever le crayon si la courbe est continue ni repasser et en s'appliquant bien à rendre **la courbe tangente aux extrema locaux**.

Contenu

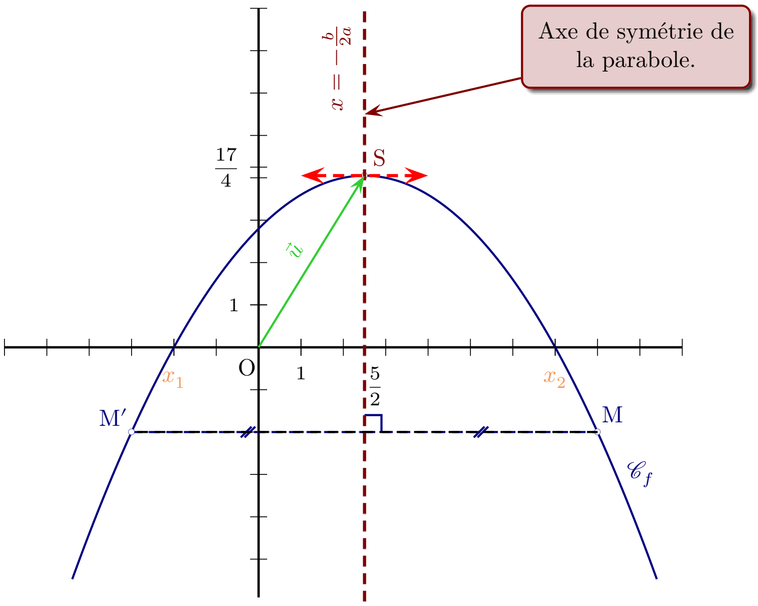


Figure V.1 – Courbe représentative de
$x \longmapsto -\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{14}{5} = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} = -\frac{1}{5}(x+2)(x-7)$.

I LES FONCTIONS POLYNOMIALES

I.1 Généralités

Définition 1 : On appelle *fonction polynomiale* une fonction de la forme :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des réels.

Si $a_n \neq 0$,

- n est appelé le **degré** de la fonction polynomiale ;
- a_n est le **coefficient dominant** ;
- $a_n x^n$ est le **monôme dominant**.

On dit qu'un réel α est une **racine** (ou un **zéro**) de la fonction polynomiale lorsque $f(\alpha) = 0$.

Exemples 1 :

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax + b$ sont dites *affines*.
- Le produit de deux fonctions affines est un polynôme du second degré appelé aussi *trinôme*. Leur courbe est une *parabole*.

Dans le cas où $a \neq 0$, on a :

$$x \longmapsto ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta \qquad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-ac}{4a}.$$

Forme canonique

$$= a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \text{si } \Delta = b^2-ac>0 \text{ avec } x_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= a(x-x_0)^2 \qquad \text{si } \Delta = 0 \text{ avec } x_0 = \frac{-b}{a}.$$

Forme factorisée

- Les fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ne sont pas polynomiales.

x	$-\infty$	x_1	$-\dfrac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
$2ax+b$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	0	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	0	$+\infty$

Figure V.2 – Tableau de variation d'un trinôme du second degré $x \longmapsto ax^2+bx+c$ dans le cas où $a>0$ et $\Delta>0$.

I.2 Racines et factorisation

Théorème 1 (Admis pour l'instant) :

- Une fonction polynomiale de degré $n>0$ a au plus n racines distinctes.
- Soit f une fonction polynomiale de degré $n>0$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

  a est une racine de f si, et seulement si on peut factoriser $f(x)$ par $(x-a)$.

Autrement dit, a est une racine de f polynomiale de degré n si, et seulement si il existe une fonction polynomiale Q (de degré $n-1$) telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)\mathrm{Q}(x).$$

Méthode 2 (Factoriser un polynôme) :
Connaissant une racine d'un polynôme, il y a deux méthodes essentielles pour factoriser un polynôme connaissant une racine :

1. *Par identification.*
2. *Par division euclidienne.*

Exemple 2 (Division euclidienne) : Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^4+5x^3+5x^2-5x-6$ dont 1 est racine.

Effectuons la division euclidienne de f par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
1x^4 & + & 5x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & x-1 \\ \cline{10-10}
-(x^4 & - & x^3) & & & & & & & 1x^3+6x^2+11x+6 \\ \cline{1-3}
 & & 6x^3 & + & 5x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & -(6x^3 & - & 6x^2) & & & & & \\
 & & & & 11x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & & & -(11x^2 & - & 11x) & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 6x & - & 6 & \\
 & & & & & & -(6x & - & 6) & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On obtient donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)(x^3+6x^2+11x+6)$.

Et l'on peut poursuivre...

$$\begin{aligned} &= (x-1)(x+1)(x^2+5x+6) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x+3). \end{aligned}$$

Exercice 1 : Factoriser les expressions suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$\mathrm{A}(x) = (x-3)^2 - 16$ $\qquad$ $\mathrm{B}(x) = x^3 - 1$

I.3 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 2 :

- Les fonctions polynomiales sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction polynomiale de coefficient dominant a_n.

  Alors $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = signe(a_n) \times \lim_{x\to\pm\infty} x^n$.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction polynomiale est celle de son monôme de plus haut degré.

Exercice 2 : Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions polynômiales définies par :

$f_1(x) = x^2 + 3x - 5$ $\qquad$ $f_3(x) = 3x^6 - x^4 + 2x + 3.$

$f_2(x) = 7x^5 - 3x^2 + 2x + 1.$ $\qquad$ $f_4(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 2.$

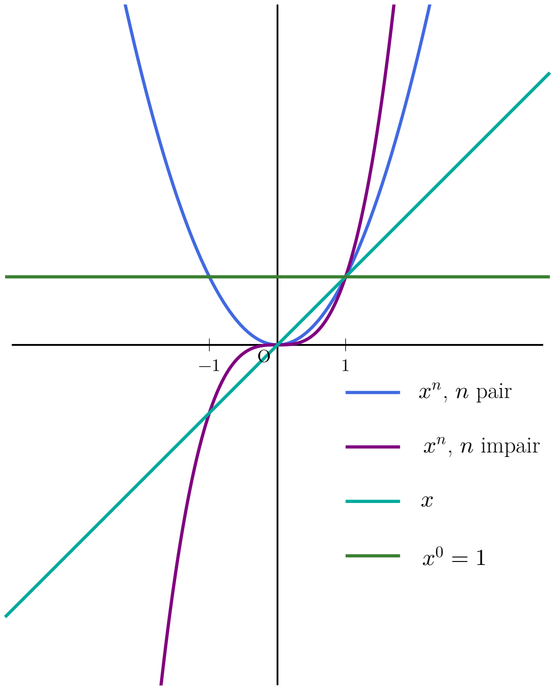


Figure V.3 – Limites en l'infini des fonctions $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

II Les fonctions rationnelles

II.1 Généralités

Définition 2 : On appelle *fonction rationnelle* tout quotient de fonctions polynomiales de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \end{array}$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et $b_0, b_1, \cdots, b_m$ sont des réels.

- Les racines du numérateur sont toujours appelées les racines de f.
- Les racines du dénominateur sont appelées les *pôles* de f.
- Si $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, on prolonge la notion de degré d'un polynôme aux fractions rationnelles en posant : $\deg(f) = n - m$.

Remarque : Une fraction rationnelle aura au plus autant d'asymptotes verticales que ce qu'elle a de pôles.

Exemple 3 : On appelle fonction *homographique* toute fonction rationnelle définie par le quotient de deux fonctions affines $x \longmapsto ax + b$ et $x \longmapsto cx + d$ non proportionnelles *i.e.* $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c}}{cx+d}.$$

- Sa courbe, appelée *hyperbole* (équilatère[1]), admet deux asymptotes d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ dont le point d'intersection est le centre de symétrie de la courbe.

- Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\frac{a}{c}$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	$\frac{a}{c}$

Figure V.4 – Tableau de variation d'une fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dans le cas où $ad - bc < 0$ et $c \neq 0$.

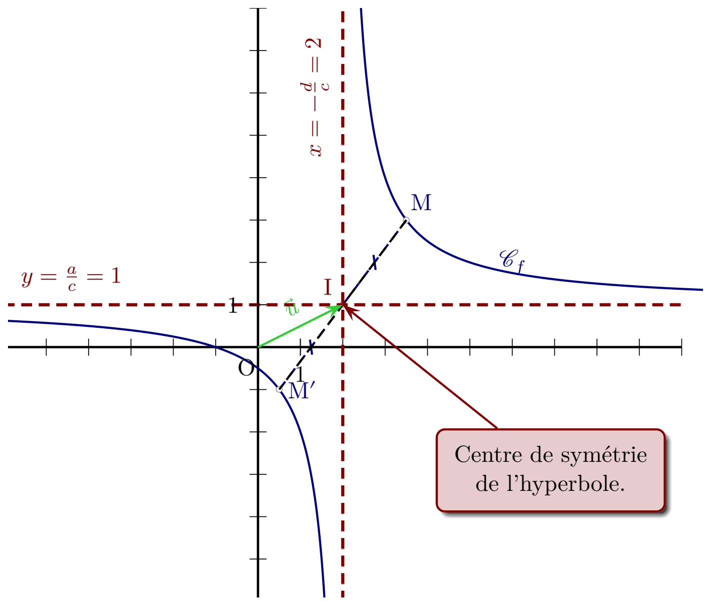


Figure V.5 – Courbe représentative de $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

II.2 Limites, Continuité et Dérivabilité

Théorème 3 :

- Les fonctions rationnelles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ privé de leurs pôles.
- Soit f une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ de degré $r = n - m \in \mathbb{Z}$ et $b_m \neq 0$.

  Alors $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = signe\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times \lim_{x\to\pm\infty} x^r$.

Autrement dit, la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

[1]. Hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Remarque : Une fraction rationnelle admet une asymptote horizontale si, et seulement si son degré est négatif ou nul et, dans ce cas, son équation est $y = 0$ ou $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ respectivement.

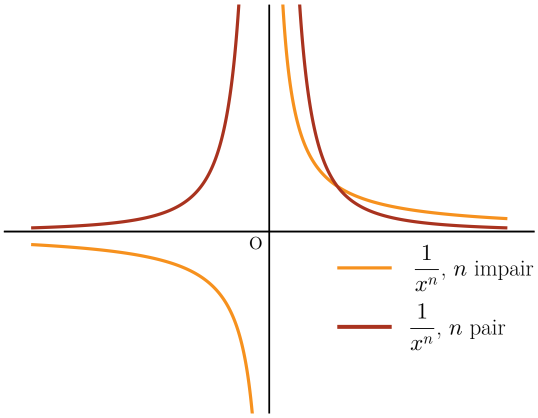


Figure V.6 – Limite en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{-x^2+x+6}$

III La fonction logarithme népérien

III.1 Le logarithme est défini pour tout x strictement positif

Rappel 1 : La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En particulier, le domaine de définition est imposé par la définition :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\ln} = \left]0\,;+\infty\right[.}$$

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \ln(5x-3)$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{1-x}\right)$ $\qquad$ $f_3 : x \longmapsto \ln(x^2-2x+1)$

III.2 Le logarithme est strictement croissant

Théorème 4 :

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(|x|)$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
Ce résultat a déjà été établi pour $x > 0$, et il reste valable pour $x < 0$ car on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(-x)) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

En conséquence, $x \longmapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire 4.1 : Soient a et b deux réels **strictement positifs**.

- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.
- $\ln(a) = 0 \iff a = 1$ et $\ln(a) > 0 \iff a > 1$.

Exemple 4 : Résoudre $\ln(2-2x) = \ln 2$.

Tout d'abord les conditions d'existence. Cette équation ne sera valide que si $2 - 2x > 0$ *i.e.* $x \in]-\infty\,;1[$.

Il suffit alors de résoudre en appliquant les propriétés ci-dessous :

$$\ln(2-2x) = \ln 2 \iff 2 - 2x = 2 \iff x = 0.$$

Comme $0 < 1$, on a $\mathscr{S} = \{0\}$.

III.3 Composée

Théorème 5 : Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors, la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a :

$$\Big(\ln u\Big)' = \frac{u'}{u}.$$

Comme u est nécessairement positive, le signe de $\Big(\ln u\Big)'$ est le même que celui de u' *i.e.* les fonctions $\ln u$ et u ont le même sens de variations sur I. [2]

En mieux, ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, composée par elle ne change pas la monotonie.

[2]. Attention ! Elles peuvent ne pas avoir et n'ont surement pas le même domaine de définition.

III.4 Le logarithme transforme les produits en sommes

Proposition 6 (Propriétés algébriques) : Soient $a,\, b \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{Q},\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

La relation 1 est appelée *relation fondamentale* du logarithme. Elle va imposer une croissance très, très, très faible.

En particulier, $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x).}$

Exemples 5 :

1. $\ln 50 = \ln(5^2 \times 2) = 2\ln 5 + \ln 2$.
2. $\ln\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\ln(2^2 \times 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$.
3. Déterminons l'entier n tel que $2^n > 10000$.

$$2^n > 10000 \underset{\text{ln str. croissante}}{\iff} n\ln 2 > \ln(10000) = 4\ln(10) \iff n > 4\frac{\ln(10)}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0\,!.$$

Comme $4\dfrac{\ln(10)}{\ln 2} \simeq 13,3$, l'entier n devra être supérieur à 14.

Corollaire 6.1 : Pour tout réels strictement positifs, $a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n,\, b_1,\, b_2,\, ...,\, b_m$, on a :

$$\ln\left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}\right) = \ln(a)_1 + \ln(a)_2 + \dots + \ln(a)_n - \ln(b)_1 - \ln(b)_2 - \dots - \ln(b)_m$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(a)_k - \sum_{k=1}^{m} \ln(b)_k.$$

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

III.5 Le logarithme réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 7 (Limites aux bornes) :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

En particulier, l'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe de ln en 0^+.

Théorème 8 : La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, 1 admet un unique antécédent par ln, noté e :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e} \simeq 2,71828.$$

III.6 Le logarithme est dominé par les fonctions polynômes

Théorème 9 (Croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

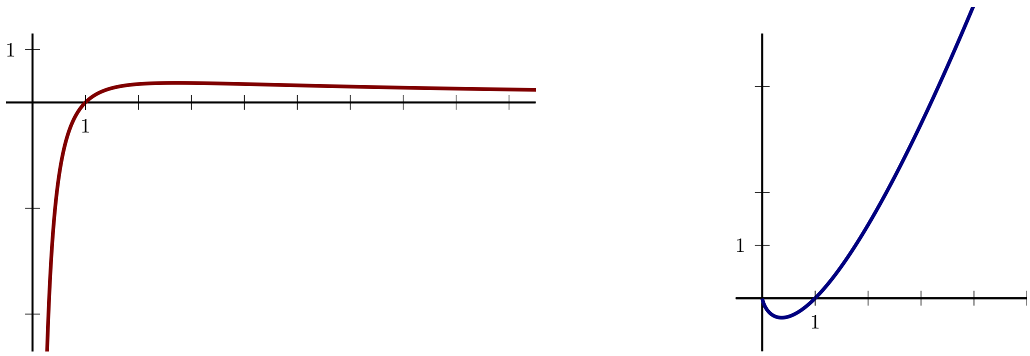


Figure V.7 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $x \longmapsto x\ln(x)$.

Exemple 6 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

III.7 Le logarithme est au-dessous de ses tangentes

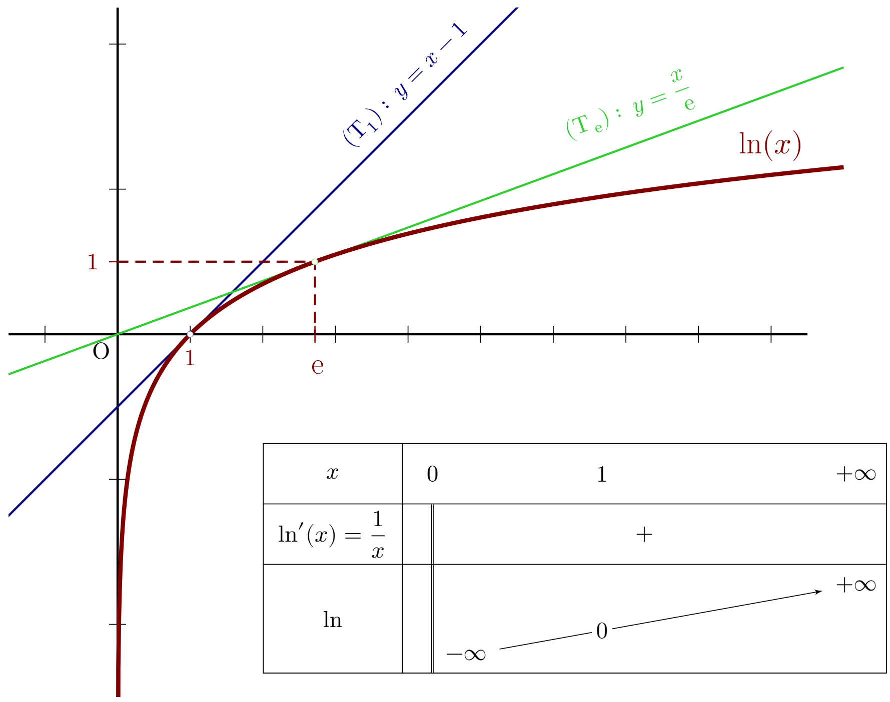
Proposition 10 (Tangentes) :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.
- $\forall\, x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

Remarque : Par une petite translation, on obtient du même coup que, pour tout $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$,

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

III.8 Courbe représentative



x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

Figure V.8 – Courbe représentative de $x \longmapsto \ln(x)$ et ses tangentes en 1 et e.

IV LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

IV.1 L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de ln, notée exp telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} \exp y = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \exp : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{array}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.} \tag{V.1}$$

Théorème 11 :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)(x) = x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Exercice 6 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$f_1 : x \longmapsto \ln\left(1 - e^x\right)$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{x-2} - 2}$ $\qquad f_3 : x \longmapsto \sqrt{5 - e^x}$

Corollaire II.1 : Dans un repère orthonormal, les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

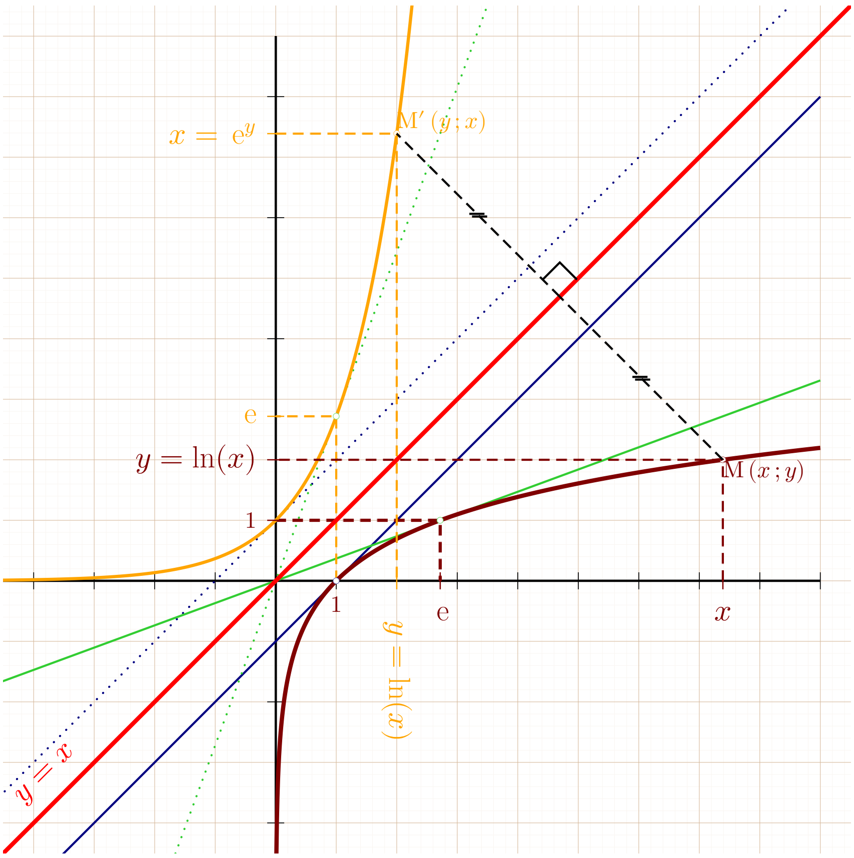


Figure V.9 – Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

IV.2 L'exponentielle est strictement croissante

Théorème 12 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left(\exp\right)'(x) = \exp(x). \tag{V.2}$$

La fonction exp est l'unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ du système :

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x) & = f(x) \end{cases} \tag{V.3}$$

Corollaire 12.1 : Soient a et b deux réels.

- $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$ et $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$.
- $\exp(a) = 1 \iff a = 0$ et $\exp(a) > 1 \iff a > 0$.

IV.3 L'exponentielle transforme les sommes en produits

Proposition 13 (Propriétés algébriques) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759\ldots$$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$.

- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$ et $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.

Exercice 7 : On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + 30\,\mathrm{e}^{-x} = 17$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(17x-30)$.

IV.4 L'exponentielle est prépondérante sur les polynômes

Théorème 14 :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$.

En particulier, l'axe des abscisses est *asymptote* à la courbe en $-\infty$.

Théorème 15 (Croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$ [3].

Exemple 7 : Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \mathrm{e}^{-x}$.

On a $x + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} + 1\right) = \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^{x} + 1)$.

[3]. Si nécessaire, on peut affiner un peu suivant la parité de n : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$, d'après les théorèmes sur les sommes de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,\mathrm{e}^x+1) = 1$ puis, d'après les théorèmes sur les produits de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}(x\,\mathrm{e}^x+1) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\times 1 \underset{u=-x}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty.$$

Exercice 8 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\,(x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$

IV.5 L'exponentielle est au-dessus de ses tangentes

Théorème 16 :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.$
2. $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^x \geqslant x+1.$

Comme pour le logarithme, la première assertion exprime que la fonction exp se comportent comme la fonction $x \longmapsto x+1$ [4] au voisinage de 0.

IV.6 Courbe représentative

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

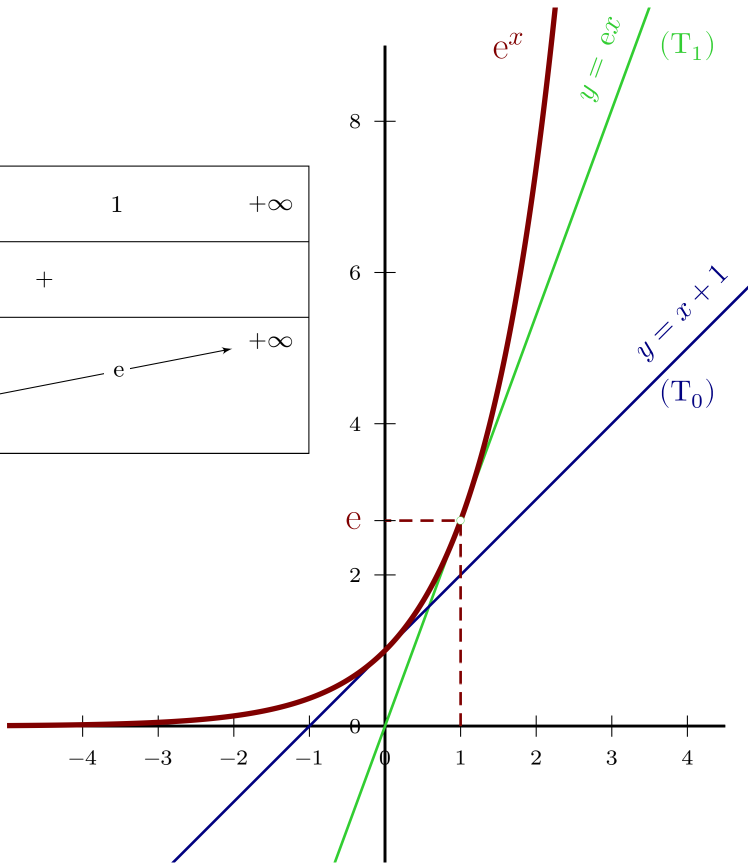


Figure V.10 – Courbe représentative de $x \longmapsto \exp(x)$ et ses tangentes en 0 et 1.

[4]. Sa tangente en 0 donc.

IV.7 Composée

Proposition 17 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u' \times \mathrm{e}^u.$$

Exercice 9 : Après avoir défini les domaines d'existence et de différentiabilité, donner la dérivée des fonction définies par :

$f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad f_2(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ $\qquad f_3(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$

V LES FONCTIONS PUISSANCES

Lorsque n est un entier (et a strictement positif),

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \ldots \times \mathrm{e}^{\ln(a)}}_{n \text{ fois}} = \mathrm{e}^{\overbrace{\ln(a)+\ln(a)+\ldots+\ln(a)}^{n \text{ fois}}} = \mathrm{e}^{n\ln(a)}.$$

V.1 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Définition 5 (Exponentielle de base a) : Pour tout réel a strictement positif et tout réel x, on pose :

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.$$

Remarque : $a > 0$ s'impose par le fait que figure $\ln(a)$ dans l'expression.

Exercice 10 : Simplifier les écritures suivantes :

1. $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$.
2. $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$
3. $27^{\frac{5}{3}}$

Proposition 18 (Propriétés algébriques) : Pour tous réels a et b strictement positifs et quels que soient les réels r et s, on a :

1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$
2. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^r \times b^r = (ab)^r$
5. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

La relation 5 est une généralisation de la relation 4 de la proposition (6) .

Méthode 3 :
Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, u à valeur strictement positive, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle $\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ pour en simplifier l'étude.

Cas $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		$+$	
a^x	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

Cas $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a) \times a^x$		$+$	
a^x	$+\infty$ $\searrow$	1	$\searrow$ 0

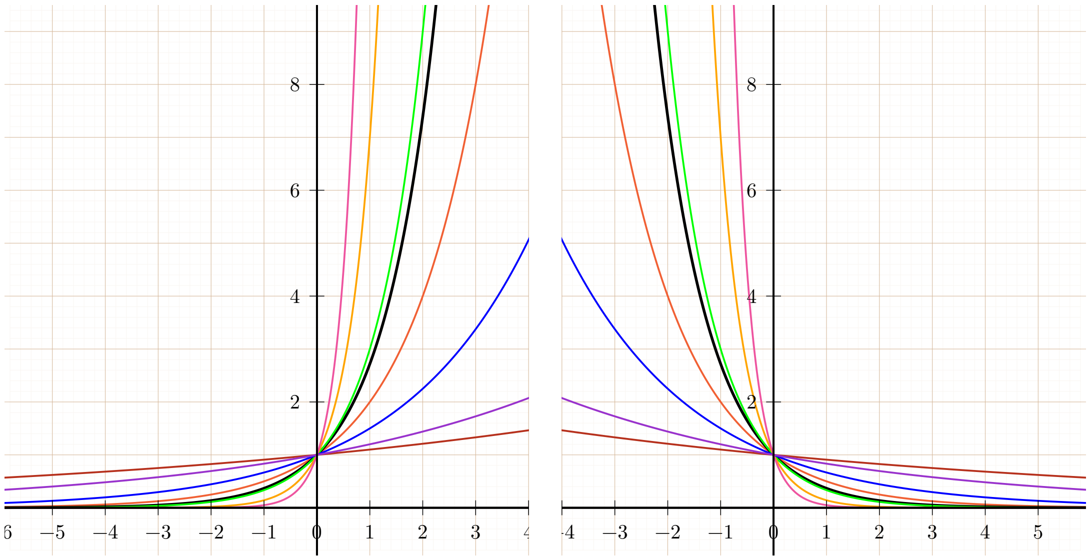


Figure V.11 – La fonction exponentielle de base $a > 0$, $x \longmapsto a^x$.

ATTENTION La définition (5) permet donc de prolonger les propriétés de a^n en remplaçant $n \in \mathbb{Z}$ par $x \in \mathbb{R}$ ce qui est bien mais ce prolongement a un prix à payer : a doit nécessairement être strictement positif. On ne peut pas tout avoir !

V.2 Fonction puissance réelle

Définition 6 : Pour tout réel α et tout réel x strictement positif, on pose :

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}.$$

Remarque : Comme pour la partie précédente, la présence de ln restreint le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ à $\mathbb{R}_+^*$. Ce n'est donc qu'un prolongement **partiel** des fonctions polynômiales x^n ou rationnelles $\dfrac{1}{x^n}$ que vous connaissez.

Exercice 11 : Écrire sous la forme exponentielle les nombres suivants :

1. 3^{-x}
2. x^2
3. $\sqrt{x}$
4. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$
5. x^x
6. x^{x^x}

Théorème 19 : Soit α un réel fixé.

La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Le signe de la dérivée dépend donc de celui de α.

Proposition 20 : Soit α un réel fixé.

$\alpha > 0$ **:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

$\alpha < 0$ **:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$.

Prolongement par continuité : Dans le cas, $\alpha > 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 en posant naturellement $0^\alpha = 0$.

On dit alors que l'on a *prolongé la fonction puissance par continuité* en 0.

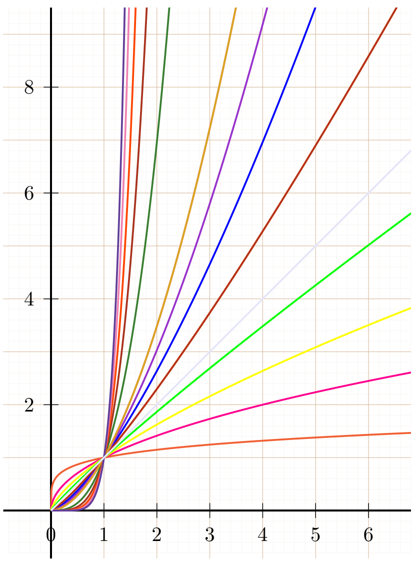
Cette nouvelle fonction puissance qui coïncide avec l'ancienne sur $]0\,;+\infty[$ est alors définie sur $[0\,;+\infty[$. On les confondra désormais.

Cas $\alpha > 0$ ($\alpha \in \,]0\,;1[$) **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\|\|$	$+$	
x^α	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

Cas $\alpha < 0$ **:**

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\|\|$	$-$	
x^α	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	1	$\searrow$ 0



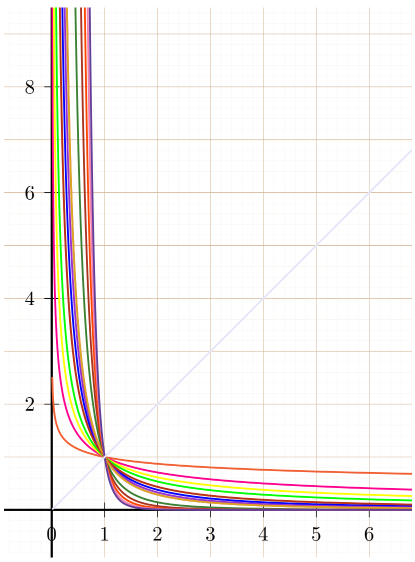


Figure V.12 – Les fonction puissances $x \longmapsto x^\alpha$.

ATTENTION Pour $\alpha \in \,]0\,;1[$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue en 0 après prolongement, mais elle possède en 0 une tangente verticale, signe qu'elle N'est PAS dérivable en 0. C'est typiquement ce qui arrive à la fonction racine carrée.

Réciprocité : Pour tout réel α non nul et tout $x > 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ réalise une bijection [5] de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.

[5]. son prolongement plutôt

La fonction f admet donc une fonction réciproque définie sur $[0\,;+\infty[$ que l'on vérifiera coïncider avec la fonction :

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & x^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}$$

Enfin, comme pour les courbes de ln et exp, les courbes des fonctions $x \longmapsto x^{\alpha}$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

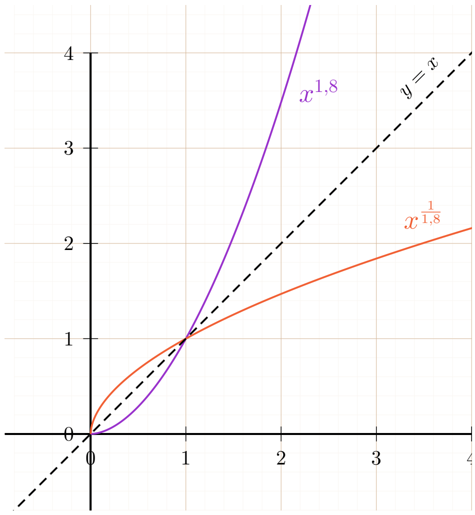


Figure V.13 – Les courbes représentatives de $x \longmapsto x^{\alpha}$ et de sa réciproque $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction racine n-ièmes : En particulier, pour tout entier n non nul et tout $x > 0$, on appelle fonction *racine n-ième*, la réciproque de $f: x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt[n]{\ }: \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ x & & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

De plus, on remarquera que pour tout x strictement positif et $n \geqslant 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Enfin, si n est impair, on prolonge la définition à $\mathbb{R}$ tout entier.

Proposition 21 (Croissances comparées) : Pour tous α, β strictement positifs.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\beta}\,\big|\ln(x)\big|^{\alpha} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^{\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$

$$\boxed{1 \prec \big(\ln(x)\big)^{\alpha} \underset{\alpha<\alpha'}{\prec} \big(\ln(x)\big)^{\alpha'} \prec x^{\beta} \underset{\beta<\beta'}{\prec} x^{\beta'} \prec \mathrm{e}^{x} \underset{\mathrm{e}<\mathrm{f}}{\prec} \mathrm{f}^{x}.}$$

Exercice 12 : Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 et en $+\infty$.

$f_2 : x \longmapsto x\ln\sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$.

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x + x^2}$ en $\pm\infty$.

VI La fonction logarithme décimal

Définition 7 : On appelle *logarithme décimal*, la fonction, notée log, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Proposition 22 :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \log\left(10^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ 10^{\log(x)} = x.$$

$\log(10) = 1$ et, d'une manière générale $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\log(10)^n = \dfrac{\ln(10)^n}{\ln(10)} = n \times \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = n$.

Mieux, la fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel x, associe $e^{x\ln(10)} = 10^x$.

Exercice 13 : Montrer que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 23 :

- $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*,\quad \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad$ et $\quad \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*,\quad \log\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log(y)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, n \in \mathbb{Z},\quad \log(x^n) = n\log(x) \quad$ et $\quad \log(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\log(x)$.

Proposition 24 : La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

Exercice 14 : Exprimer en fonction de $\log(2)$ les nombres suivants :

1. $\log(20)$
2. $\log(2000)$
3. $\log(0,008)$
4. $\log(1,024)$
5. $\log\left(\dfrac{1}{0,00064}\right)$
6. $\log\left(1,28 \times 2^{27}\right)$

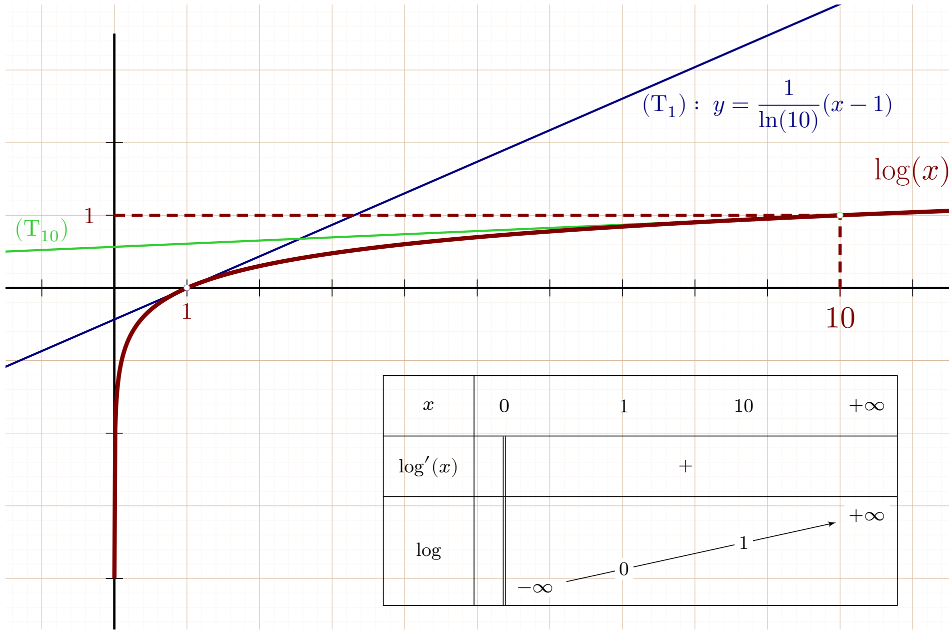


Figure V.14 – Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \log(x)$ et sa tangente en 1.

VII Les fonctions hyperboliques

Définition 8 (Fonctions hyperboliques) :

- On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la partie paire de la fonction exponentielle définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
- On appelle fonction *sinus hyperbolique* la partie impaire de la fonction exponentielle définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

En particulier et par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x).} \tag{V.4}$$

De plus, on a l'identité, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$$

Exercice 15 : Résoudre :

1. $\mathrm{ch}(x) = 2$.
2. $5\mathrm{ch}(x) - 4\mathrm{sh}(x) = 3$.
3. $\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 4 \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 1 \end{cases}$.

Proposition 25 (Cosinus hyperbolique) :

- $\mathrm{ch}(0) = 1$.

- La fonction ch est paire et minorée par 1 atteint en 0.
- La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

- $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x} = 0.$

De même, on a :

Proposition 26 (Sinus hyperbolique) :

- $\operatorname{sh}(0) = 0.$
- La fonction sh est impaire.
- La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure V.15 – Tableaux de variation de $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \longmapsto \operatorname{sh}(x)$.

Exercice 16 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \operatorname{ch}(x)\cos(x) + \operatorname{sh}(x)\sin(x).$
2. $g : x \longmapsto \operatorname{ch}^4(x)\operatorname{sh}^2(x).$

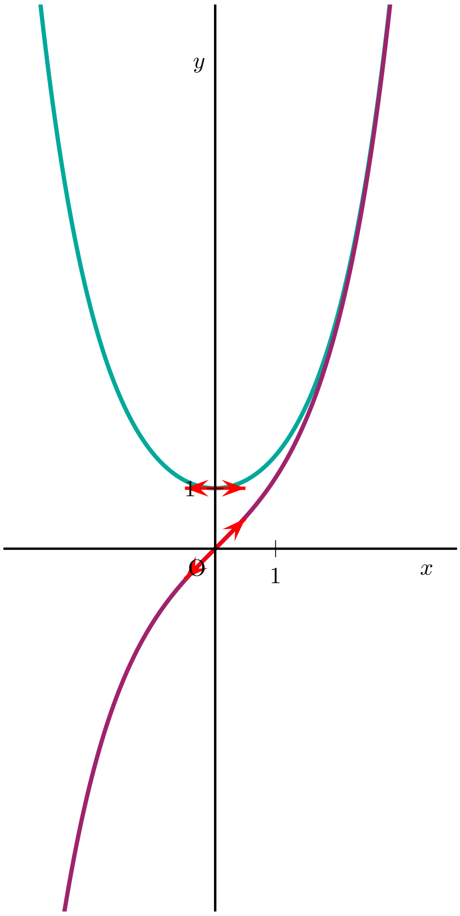


Figure V.16 – Courbes représentatives de $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{sh}\,(x)$ et leur tangente en 0.

VIII Tableau récapitulatif

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		0
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{R}$		nx^{n-1}
x^α, $\alpha \in]1\,;+\infty[$	$\mathbb{R}_+$		$\alpha x^{\alpha-1}$
x^α, $\alpha \in]0\,;1[$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$		
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$		$\dfrac{1}{x}$
$\log_a(x)$			$\dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$		e^x
a^x, $0 < a$			$\ln(a) \times a^x$
$\mathrm{ch}\,(x)$			$\mathrm{sh}\,(x)$
$\mathrm{sh}\,(x)$			$\mathrm{ch}\,(x)$