Fonctions de référence

On considère h, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x^2 + 2x(1 - \ln(2x)). \end{array}$$

1 Étude locale :

- (a) Déterminer le domaine de définition de h.
- (b) Étudier la parité de h.
- (c) Déterminer proprement les limites aux bornes du domaine de définition. Conséquence graphique ?
- (d) Déterminer le tableau de variation complet de h.

2 Comportement asymptotique :

- (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

  Que peut-on en déduire pour le comportement asymptotique en $+\infty$ de h ? (limites, asymptotes éventuelles, directions asymptotiques)
- (b) Même question pour la fonction $\mathrm{H} : x \longmapsto \dfrac{h(x)}{x}$.

3 Réciproque :

- (a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est-elle minorée ? majorée ? bornée ? Admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui le(s) préciser.
- (b) La fonction $h : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
- (c) Montrer que h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.

On note φ sa fonction réciproque.

- (d) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\varphi(y) - 2\ln(2\varphi(y))}.$$