Fonctions de référence

Exercice 1 : On pose $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$

Représenter l'allure des courbes des fonctions définies par $x \longmapsto f(x)-3$, $x \longmapsto f(x-2)$, $x \longmapsto f(2+x)$, $x \longmapsto \frac{1}{2}f(x)$ et $x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 2 : Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ par x^2+x+1
2. $x^4+5x^3+12x^2+19x-7$ par x^2+3x-1
3. x^5-x^2+2 par x^2+1

Exercice 3 : Factoriser les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{A}(x) = \frac{1}{4}x^2+x+1$$
$$\mathrm{B}(x) = x^2-16+(x-4)(5x+7)$$
$$\mathrm{C}(x) = 5x^2-2x-3$$
$$\mathrm{D}(x) = x^2+3x+1$$
$$\mathrm{E}(x) = x^3+1$$
$$\mathrm{F}(x) = x^4+2x^2+1$$
$$\mathrm{G}(x) = x^4+1$$
$$\mathrm{H}(x) = 2x^4+x^3-4x^2+3x-2$$

Exercice 4 : Résoudre l'équation $x^5+6x^4-6x^3-36x^2+x+6=0$, sachant que les racines sont composées d'un nombre, son opposé, son inverse, l'inverse de l'opposé, et la somme du produit du nombre par l'opposé et du produit de l'inverse par l'opposé de l'inverse de ce nombre.

Exercice 5 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(0,5)+\ln(2)$
2. $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$
3. $\mathrm{e}^{-5\ln 2}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3\ln 5-1}}{\mathrm{e}^{2+\ln 5}}$
5. $\dfrac{2e}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
6. $3\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)+4e^{-5\ln \mathrm{e}^2}$
7. $-5e^{-4}\times(\sqrt{\mathrm{e}})^3\times 2e^2$
8. $(0,25)^{(1,5)}$
9. $\sqrt[5]{243}$
10. $\sqrt[3]{2^4}\sqrt[3]{2^6}$
11. $625^{0,125}$
12. $\ln\left(\sqrt{10}+3\right)^4+\ln\left(\sqrt{10}-3\right)^4$
13. $\mathrm{e}^{-10x+2}\times\left(\mathrm{e}^{-x-2}\right)^{-2}\times\left(\mathrm{e}^{3x-2}\right)^3$
14. $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}$
15. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$
16. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

Exercice 6 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur un domaine à préciser :

1. $\ln(-2-3x)\geqslant 0$
2. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$
3. $\ln(x+2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$
4. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)>\ln 3$
5. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)\geqslant 0$
6. $\ln^2(x)-3\ln(x)-4=0$
7. $\exp(-x)>0$
8. $(\ln(x)-2)(\ln(x)+1)=0$
9. $(\exp(x)-3)(\exp x+1)=0$
10. $\exp(2x-1)>\exp x$
11. $x\exp(-2x)-3\exp(-2x)<0$
12. $\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^{-x}+1=0$
13. $\dfrac{\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x-1}>0$
14. $\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^x-3\geqslant 0$
15. $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}=1$
16. $\mathrm{e}^{x^2+2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}}$
17. $2^x=3^{2x+1}$
18. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{3}{2}$
19. $5^{1-3x}=\dfrac{1}{125}$

20 $4^x - 6^x = 2 \times 9^x$

21 $2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geqslant 0$

22 $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

23 $2^{x^3} = 3^{x^2}$

24 $2^{2x^2} \leqslant 2^{x+1}$

Exercice 7 : Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

1 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{3-5x}{-x^2-x+2}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x^3+1}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x-2}{x^2-1}$

5 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{-x}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$

7 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}$

8 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x+1}$

9 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

10 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

11 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3x-1}$

12 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$

13 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^x$

14 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{1-x}$

15 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x+1}}$

16 $\sqrt{x}\ln(x)$ en 0 et en $+\infty$

17 $\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$ en 0 et en $+\infty$

18 $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ en 0 et en $+\infty$

19 $\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$ en $-\infty$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

1 Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+1}$.

2 Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$ dont on précisera l'équation.

3 Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de (Δ).

Remarque : Une fraction rationnelle admet une *asymptote oblique* si, et seulement si son degré est égal à 1.

Exercice 9 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+4}{x-1}$.

1 Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall\, x \neq 1,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

2 En déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10 : Dans chaque cas, calculer la dérivée en précisant rapidement le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes définies par :

$f_1(x) = \ln(1-5x)$

$f_2(x) = \ln(3x^2-5x+7)$

$f_3(x) = \ln((x+1)(5-x))$

$f_4(x) = \ln^3(1+2x)$

$f_5(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

$f_6(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$f_7(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$f_8(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$f_9(x) = \dfrac{3-2\ln(x)}{x-1}$

$f_{10}(x) = \sqrt{\ln(x)}$

$f_{11}(x) = (2-\ln(x))(1-\ln(x))$

$f_{12}(x) = \exp(x)\sin(x)$

$f_{13}(x) = (x+1)\exp(x)$

$f_{14}(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$f_{15}(x) = (3-2x)e^{2x+1}$

$f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x}}{3x+2}$

$f_{17}(x) = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

$f_{18}(x) = \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

$f_{19}(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

$f_{20}(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$

Exercice 11 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{4}{5}$.

   À partir de quel indice n a-t-on $u_n \leqslant 10^{-3}$?
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n \geqslant 10^9$.

Exercice 12 : Montrer que les fonctions ci-dessous établissent des bijections entre des espaces à préciser et expliciter f^{-1}.

Sont-elles dérivables ? Si oui, sur quels intervalles ?

1. $f : x \longmapsto \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.
2. $g : x \longmapsto \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

Exercice 13 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x, y \in\ ]0\,;+\infty[\,,\ f(xy) = f(x) + f(y), \tag{IV.1}$$

1. Déterminer $f(1)$.
2. Montrer que $\forall\, x \in\ ]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\beta}{x}$ pour un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.
3. En déduire que $f = \beta \ln$.
4. Montrer que toute fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation (IV.1) est proportionnelle à la fonction logarithme népérien.

Exercice 14 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) \times f(y), \tag{IV.2}$$

1. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $f(0)$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à préciser.
4. En déduire que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (IV.2) est une puissance de l'exponentielle de base e *i.e.* s'écrit sous la forme :

$$f(x) = (\mathrm{e}^x)^k = \mathrm{e}^{kx}, \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Exercice 15 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Exercice 16 : Pour $a > 0$, exprimer $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}\right)\right)$ à l'aide de $\sqrt{a+1}$ uniquement.

Exercice 17 (Trigonométrie hyperbolique) : Soient a et b deux réels.

Montrer que :

1. Formule d'addition :

$$\mathrm{ch}\,(a+b)=\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b)+\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a+b)=\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b)+\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$
$$\mathrm{ch}\,(a-b)=\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{ch}\,(b)-\sin a\mathrm{sh}\,(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a-b)=\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(b)-\mathrm{ch}\,(a)\mathrm{sh}\,(b).$$

2. Formule de linéarisation : $\mathrm{ch}^2(a)=\dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)+1}{2}$ et $\mathrm{sh}^2(a)=\dfrac{\mathrm{ch}\,(2a)-1}{2}$.

3. Formule de duplication : $\mathrm{sh}\,(2a)=2\mathrm{sh}\,(a)\mathrm{ch}\,(a)$ et
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,(2a)&=\mathrm{ch}^2(a)+\mathrm{sh}^2(a)\\&=2\mathrm{ch}^2(a)-1\\&=1+2\mathrm{sh}^2(a).\end{aligned}$$

4. Formule de (factorisation par) l'angle moitié

$$\mathrm{ch}\,(a)+\mathrm{ch}\,(b)=2\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(a)-\mathrm{ch}\,(b)=2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$
$$\mathrm{sh}\,(a)+\mathrm{sh}\,(b)=2\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(a)-\mathrm{sh}\,(b)=2\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 18 : Étude complète de la fonction th définie par $\mathrm{th}\,(x)=\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.

On montrera, notamment, que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser.

Exercice 19 : Soit f l'application définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}x^{x+1} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

   En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}+1$, déterminer le signe de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que f établit une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans lui-même.

   (b) Sans aucun calcul, donner les propriétés de l'application réciproque f^{-1} (continuité, dérivabilité, variations). Préciser les valeurs $\left(f^{-1}\right)'(1)$ et $\left(f^{-1}\right)'(8)$.
5. Représenter dans un même repère orthonormal f et f^{-1}.

Exercice 20 : Soit la fonction f définie par $f: x\mapsto \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}$.

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
2. Montrer que, là où f est dérivable : $f'(x)=\dfrac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.
5. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
6. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ que l'on déterminera à 10^{-2} près.