Programme de kolles
Logique, raisonnement et fonctions réelles

Valable pour les semaines 3 et 4

Fonctions réelles

- Définition d'une fonction, ensemble de définition, ensemble image, image réciproque.
- Opérations sur les fonctions, composée.
- Graphe d'une fonction, transformation du graphe :
 - translation horizontale $x \mapsto f(x + a)$,
 - translation verticale $x \mapsto f(x) + a$,
 - dilatation horizontale $x \mapsto f(ax)$,
 - dilatation verticale $x \mapsto af(x)$.

Il faut être capable de déduire le graphe d'une fonction définie par ces opérations, en partant d'une fonction de référence connue

- Fonction paire, impaire, périodique, conséquences sur les graphes.
- Monotonie, majoration, minoration, fonctions bornées.
- Révisions du lycée :
 - continuité : somme, produit, composition de fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires.
 - dérivation : taux d'accroissement, équation de la tangente, dérivation d'une somme, d'un produit d'une composée.
 - tableau de variation complet
- des compléments :
 - Dérivées n-ièmes (juste la définition).
 - Maximum, minimum local, global.
 - Injection, surjection, bijection.

- Fonction réciproque, graphe de la fonction réciproque.
- Théorème de la bijection. Dérivée de la réciproque.
- Asymptote, branche parabolique.

Fonctions usuelles

- Le logarithme népérien ($x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$).
 - Continuité, dérivation, monotonie.
 - Propriétés algébriques.
 - Limite aux bornes, graphe, croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$
- La fonction exponentielle (comme réciproque de la fonction logarithme).
 - Continuité, dérivation,
 - Propriétés algébriques,
 - Graphes, limites aux bornes et croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Questions de cours

Chaque étudiant sera interrogé sur l'une des démonstrations suivantes :

- La fonction logarithme népérien est continue. Dérivabilité et valeur de la dérivée si l'étudiant s'en sent capable.
- Limites remarquable de la fonction $\ln$ avec démonstration de la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$.
- Propriétés algébriques du logarithme. Démonstration pour le logarithme du produit, plus si l'étudiant est à l'aise.

L'examineur reste seul maître de l'interrogation orale et peut demander des éclaircissements et compléments en accord avec le programme

Applications

Exercice 1 (Vrai ou Faux?) : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

- 1 Si f est croissante et $f(a) < f(b)$, alors $a < b$.
- 2 Si f est croissante et $f(a) \leq f(b)$, alors $a \leq b$.
- 3 Si f est strictement croissante et $f(a) \leq f(b)$, alors $a \leq b$.
- 4 $[\forall u, v \in \mathbb{R}, (u < v \implies f(u) \leq f(v))] \iff [\forall u, v \in \mathbb{R}, (u \leq v \implies f(u) \leq f(v))]$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Montrer que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$, avec $x < y < z$ tels que :

$$\{f(x) < f(y) \text{ et } f(y) > f(z)\} \text{ ou } \{f(x) > f(y) \text{ et } f(y) < f(z)\}.$$

Exercice 3 : Écrire à l'aide des quantificateurs la négation des assertions suivantes :

1 f est majorée par M.	4 f n'admet pas de minimum global.
2 f est minorée.	5 f n'admet pas de minimum local.
3 f est bornée sur I.	

Exercice 4 : Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum.

1 $\mathbb{R}_+$	3 $[0; 1]$	5 $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2 $\mathbb{Z}$	4 $]0; 1]$	

Exercice 5 : Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\mathbb{1}_A : E \longmapsto \{0, 1\}$$

$$x \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.	d $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
b $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.	e $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
c $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.	

2 En déduire que pour toutes parties A, B et C de E :

a $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.	b $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Exercice 6 :

1 Soient les fonctions définies par $f(x) = (1 - x)^2$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.

Déterminer les fonctions $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ h$, $f \circ g \circ h$, $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$ ainsi que leur domaine de définition respectif.

2 Même question avec $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = |x|$.

Exercice 7 : Déterminer deux applications f et g telles que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 8 : Soient $f : x \mapsto \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$.

Exercice 9 : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications et A une partie de E .

Montrer que $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Exercice 10 :

1 Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications et B une partie de G .

Montrer que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

2 Montrer que $f : E \mapsto F$ est injective si, et seulement si pour toute partie A de E on a :

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

Exercice 11 : Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1 $x \mapsto \sqrt{x}$

3 $x \mapsto |x + 2| + |x - 3|$

5 $x \mapsto x^2 + 3x + 5$

2 $x \mapsto \cos(x)$

4 $x \mapsto \ln(x)$

6 $x \mapsto |x + 1|$

Exercice 12 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f_i suivantes définies par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f_9(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{\frac{2-5x}{x^2-6x+5}}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f_{11}(x) = h(x) = \ln(2x+3).$$

$$f_4(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f_{12}(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$f_5(x) = \frac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$$

$$f_{13}(x) = \ln(x-2) - \ln(x-1)$$

$$f_{14}(x) = \ln(x-2) - \ln(1-x)$$

$$f_6(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$f_{15}(x) = \ln(\ln(x))$$

$$f_7(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$f_{16}(x) = \sqrt{\ln(x+3)}$$

$$f_8(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x^2 - x - 10}$$

$$f_{17}(x) = g(x) = \frac{1}{\cos(2x)}.$$

Exercice 13 : Étudier la parité des fonctions suivantes définies par :

$$f(x) = x(3x^2 - 1).$$

$$i(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 - 1}.$$

$$l(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$g(x) = e^{|x|}.$$

$$j(x) = x \sin(x) + 1.$$

$$m(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right).$$

$$h(x) = \ln(x^2 + 1).$$

$$k(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Exercice 14 :

1 Montrer que si f est dérivable et paire, alors f' est impaire.

2 Montrer que si f est dérivable et impaire, alors f' est paire.

3 Montrer que si f est dérivable et T -périodique, alors f' est T -périodique.

Exercice 15 : Soit $f : x \mapsto \ln|x^2 - 4x + 3|$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}, f(2-x) = f(2+x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 16 : Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(1+x) + f(1-x) = -6$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 17 :

(Hors-Programme)

1 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie.

2 Soit $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet un centre de symétrie.

Exercice 18 : Soit $f : x \mapsto \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

1 Montrer que $I(-1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

(Hors-Programme)

2 Étudier les variations de f .

3 Discuter graphiquement l'équation $f(x) = m$ pour $m \in \mathbb{R}$.

4 Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 19 : Donner la dérivée des fonctions définies par leur expression suivante :

(Il s'agit d'un exercice d'entraînement technique à la différentiation donc ne se préoccupera ici et exceptionnellement pas du domaine de dérivabilité)

$$f_1(x) = (x-4)^2.$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(5x-3)^3}.$$

$$f_3(x) = \cos\left(\frac{x-1}{2x+1}\right).$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

$$f_5(x) = \tan(3x).$$

$$f_6(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}.$$

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

$$f_8(x) = \frac{x-1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$f_9(x) = \ln(x + \sqrt{1-x^2}).$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$f_{11}(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f_{12}(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}.$$

$$f_{13}(x) = (x^2 + 2x - 9)^3.$$

$$f_{14}(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3.$$

$$f_{15}(x) = (4x^3 + 2x - 1)^4.$$

$$f_{16}(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$f_{17}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3.$$

$$f_{18}(x) = \sqrt{\cos(x)}.$$

$$f_{19}(x) = \cos((x^2 - 5)^3).$$

$$f_{20}(x) = \cos(\sqrt{2 + \sin(x)}).$$

$$f_{21}(x) = \frac{5}{3(x-2)^4}.$$

$$f_{22}(x) = \frac{x^2}{(x+1)^3}.$$

$$f_{23}(x) = (1 - 5x^2)^3.$$

$$f_{24}(x) = \sin^2(x).$$

$$f_{25}(x) = \sin(x^2).$$

$$f_{26}(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$f_{27}(x) = e^{4x+1}.$$

$$f_{28}(x) = e^x \sin(x).$$

$$f_{29}(x) = e^{-x} + x^{-1}.$$

$$f_{30}(x) = \frac{1}{e^x}.$$

$$f_{31}(x) = \frac{e^{3x^2+5x-3}}{e^x + 1}.$$

$$f_{32}(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}.$$

$$f_{33}(x) = e^{5x^3+7x+4}.$$

$$f_{34}(x) = (x+1)e^{-x+1}.$$

$$f_{35}(x) = e^{\frac{2x+3}{x-2}}.$$

$$f_{36}(x) = x e^{\frac{1}{x}}.$$

$$f_{37}(x) = \frac{e^{2x}}{x+2}.$$

$$f_{38}(x) = \frac{2e^x - 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$f_{39}(x) = (x^2 - 4)e^{x-2}.$$

$$f_{40}(x) = \frac{4}{e^{2x-1}}.$$

$$f_{41}(x) = \frac{2\cos(x) + 3}{2\cos(x) - 3}.$$

$$f_{42}(x) = \sin(x)(1 + \cos(x)).$$

$$f_{43}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

$$f_{44}(x) = \frac{\cos(\pi x - 1)}{\cos(x - \pi)}.$$

$$f_{45}(x) = (3x^2 - 2)\sin^2(x).$$

$$f_{46}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

$$f_{47}(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

$$f_{48}(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(4x)}.$$

$$f_{49}(x) = \ln(\ln(x)).$$

$$f_{50}(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

$$f_{51}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f_{52}(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4.$$

$$f_{53}(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$f_{54}(x) = x e^{-x}.$$

Exercice 20 (Important) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

Montrer que f est injective si, et seulement si il existe $h : F \mapsto E$ telle que $h \circ f = id_E$.

Exercice 21 (Important) : Soit $f : E \mapsto F$ une application.

Montrer que f est surjective si, et seulement si il existe $h : F \mapsto E$ telle que $f \circ h = id_F$.

Exercice 22 : Soit E un ensemble non vide et f une application de E vers $\mathcal{P}(E)$.

En considérant la partie $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut pas être surjective.

Exercice 23 : Soient E, F et G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E; F)$, $g \in \mathcal{F}(F; G)$ et on définit l'application $h \in \mathcal{F}(E; F \times G)$ par :

$$\forall x \in E, h(x) = (f(x); g(x)).$$

1 Démontrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.

2 Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 24 (À retenir) : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto E$ deux applications telles que :

$$f \circ g = id_F \text{ et } g \circ f = id_E.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 25 : Soient E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(E; E)$ telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si f est surjective.

Exercice 26 : Soit p un entier naturel supérieur à 2.

1 Montrer que la fonction : $\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est bijective.

$$x \qquad x^p$$

2 En déduire que pour tout réel positif y , il existe un, et un seul réel positif x tel que $x^p = y$.
Comment l'appelle-t-on et comment le note-t-on ?

3 Montrer que dans le cas où $y > 0$, on a $x = e^{\frac{1}{p} \ln y}$.

Exercice 27 : Déterminer une fonction réelle bijective qui ne vérifie pas toutes les conditions du théorème de la bijection.

Exercice 28 : Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Montrer que f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ dans un intervalle à préciser, et expliciter sa réciproque f^{-1} .

Exercice 29 : Considérons la fonction $f :]1; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$$x \qquad \exp\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

1 Démontrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

2 Expliciter la réciproque de f . Peut-on en conclure que $f^{-1} = f$?

Exercice 30 : Définir la fonction arcsin, réciproque de sin sur des intervalles à préciser et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.

Exercice 31 : Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$.

1 Montrer que f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $f^{-1}\left(\frac{35}{12}\right) = \frac{1}{2}$ puis calculer $(f^{-1})'\left(\frac{35}{12}\right)$.

Fonctions de référence

Exercice 1 : On pose $f : x \mapsto e^x$

Représenter l'allure des courbes des fonctions définies par $x \mapsto f(x) - 3$, $x \mapsto f(x - 2)$, $x \mapsto f(2 + x)$, $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ et $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 2 : Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x^2 + x + 1$

2 $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 19x - 7$ par $x^2 + 3x - 1$

3 $x^5 - x^2 + 2$ par $x^2 + 1$

Exercice 3 : Factoriser les expressions polynomiales suivantes et déterminer leur signe sur $\mathbb{R}$:

A(x) = $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

B(x) = $x^2 - 16 + (x - 4)(5x + 7)$

C(x) = $5x^2 - 2x - 3$

D(x) = $x^2 + 3x + 1$

E(x) = $x^3 + 1$

F(x) = $x^4 + 2x^2 + 1$

G(x) = $x^4 + 1$

H(x) = $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

Exercice 4 : Résoudre l'équation $x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 36x^2 + x + 6 = 0$, sachant que les racines sont composées d'un nombre, son opposé, son inverse, l'inverse de l'opposé, et la somme du produit du nombre par l'opposé et du produit de l'inverse par l'opposé de l'inverse de ce nombre.

Exercice 5 : Simplifier les expressions suivantes :

1 $\ln(0,5) + \ln(2)$

2 $\ln(9\sqrt{3})$

3 $e^{-5\ln 2}$

4 $\frac{e^{3\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$

5 $\frac{2e}{\sqrt{e}}$

6 $3\ln(e^{-2}) + 4e^{-5\ln e^2}$

7 $-5e^{-4} \times (\sqrt{e})^3 \times 2e^2$

8 $(0,25)^{(1,5)}$

9 $\sqrt[5]{243}$

10 $\sqrt[3]{2^4} \sqrt[3]{2^6}$

11 $625^{0,125}$

12 $\ln(\sqrt{10} + 3)^4 + \ln(\sqrt{10} - 3)^4$

13 $e^{-10x+2} \times (e^{-x-2})^{-2} \times (e^{3x-2})^3$

14 $\sqrt{e^{2x}}$

15 $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

16 $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

Exercice 6 : Résoudre les équations et inéquations suivantes sur un domaine à préciser :

1 $\ln(-2 - 3x) \geq 0$

2 $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$

3 $\ln(x + 2) = \ln(-x - 11) - \ln(x + 3)$

4 $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$

5 $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$

6 $\ln^2(x) - 3\ln(x) - 4 = 0$

7 $\exp(-x) > 0$

8 $(\ln(x) - 2)(\ln(x) + 1) = 0$

9 $(\exp(x) - 3)(\exp x + 1) = 0$

10 $\exp(2x - 1) > \exp x$

11 $x \exp(-2x) - 3 \exp(-2x) < 0$

12 $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

13 $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$

14 $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

15 $\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1} = 1$

16 $e^{x^2+2} = \frac{e^{2x}}{e}$

17 $2^x = 3^{2x+1}$

18 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$

19 $5^{1-3x} = \frac{1}{125}$

$$\boxed{20} \quad 4^x - 6^x = 2 \times 9^x$$

$$\boxed{23} \quad 2^{x^3} = 3^{x^2}$$

$$\boxed{21} \quad 2^{2x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$$

$$\boxed{24} \quad 2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$$

$$\boxed{22} \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$$

Exercice 7 : Déterminer les limites suivantes et préciser, le cas échéant, l'équation des asymptotes :

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$$

$$\boxed{7} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\boxed{13} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{3 - 5x}{-x^2 - x + 2}$$

$$\boxed{8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$$

$$\boxed{14} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} \times e^{1-x}$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

$$\boxed{9} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{15} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\boxed{10} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{16} \quad \sqrt{x} \ln(x) \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$$

$$\boxed{11} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{3x - 1}$$

$$\boxed{17} \quad \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}} \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\boxed{12} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-2x} - e^{-x})$$

$$\boxed{18} \quad \frac{(x^x)^x}{x(x^x)} \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty$$

$$\boxed{19} \quad e^{-x} \ln(1 + e^x) \text{ en } -\infty$$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$.

$$\boxed{1} \quad \text{Déterminer trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 1}.$$

$\boxed{2}$ Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (Δ) en $\pm\infty$ dont on précisera l'équation.

$\boxed{3}$ Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ).

Remarque : Une fraction rationnelle admet une *asymptote oblique* si, et seulement si son degré est égal à 1.

Exercice 9 : Soit $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$.

$$\boxed{1} \quad \text{Déterminer trois réels } a, b, c \text{ tels que } \forall x \neq 1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

$\boxed{2}$ En déduire les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 10 : Dans chaque cas, calculer la dérivée en précisant rapidement le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes définies par :

$$f_1(x) = \ln(1 - 5x)$$

$$f_8(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$f_{15}(x) = (3 - 2x)e^{2x+1}$$

$$f_2(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$$

$$f_9(x) = \frac{3 - 2 \ln(x)}{x - 1}$$

$$f_{16}(x) = \frac{e^{2x}}{3x + 2}$$

$$f_3(x) = \ln((x+1)(5-x))$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$f_{17}(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$f_4(x) = \ln^3(1 + 2x)$$

$$f_{11}(x) = (2 - \ln(x))(1 - \ln(x))$$

$$f_{18}(x) = \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_{12}(x) = \exp(x) \sin(x)$$

$$f_{19}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$f_6(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$f_{13}(x) = (x+1) \exp(x)$$

$$f_{20}(x) = \frac{x+1}{e^{x-1}}$$

$$f_7(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$f_{14}(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 11 :

1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.

À partir de quel indice n a-t-on $u_n \leq 10^{-3}$?

2 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9$.

Exercice 12 : Montrer que les fonctions ci-dessous établissent des bijections entre des espaces à préciser et expliciter f^{-1} .

Sont-elles dérivables ? Si oui, sur quels intervalles ?

1 $f : x \mapsto \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

2 $g : x \mapsto \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

Exercice 13 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in]0; +\infty[, f(xy) = f(x) + f(y), \quad (\text{IV.1})$$

1 Déterminer $f(1)$.

2 Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\beta}{x}$ pour un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.

3 En déduire que $f = \beta \ln$.

4 Montrer que toute fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant la relation (IV.1) est proportionnelle à la fonction logarithme népérien.

Exercice 14 : On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) \times f(y), \quad (\text{IV.2})$$

1 Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2 En déduire $f(0)$.

3 Montrer que f est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre à préciser.

4 En déduire que toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (IV.2) est une puissance de l'exponentielle de base e *i.e.* s'écrit sous la forme :

$$f(x) = (e^x)^k = e^{kx}, \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Exercice 15 : Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

1 Domaine de définition.

2 Limites aux bornes du domaine de définition.

3 Domaine de dérivabilité et tableau de variation.

4 Courbe représentative.

Exercice 16 : Pour $a > 0$, exprimer $\text{ch}(\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}))$ à l'aide de $\sqrt{a+1}$ uniquement.

Exercice 17 (Trigonométrie hyperbolique) : Soient a et b deux réels.

Montrer que :

1 Formule d'addition :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) & \text{et} & \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b). \\ \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) & \text{et} & \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b). \end{aligned}$$

2 Formule de linéarisation : $\operatorname{ch}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2}$ et $\operatorname{sh}^2(a) = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2}$.

3 Formule de duplication : $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a)$ et $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a)$
 $= 2\operatorname{ch}^2(a) - 1$
 $= 1 + 2\operatorname{sh}^2(a)$.

4 Formule de (factorisation par) l'angle moitié

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{et} & \quad \operatorname{ch}(a) - \operatorname{ch}(b) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right). \\ \operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(b) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right) & \text{et} & \quad \operatorname{sh}(a) - \operatorname{sh}(b) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 18 : Étude complète de la fonction th définie par $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

On montrera, notamment, que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser.

Exercice 19 : Soit f l'application définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^{x+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1 Étudier la continuité et la dérivabilité de f .

2 Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

En utilisant la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1$, déterminer le signe de $f'(x)$.

3 Étudier les variations de f ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

4 a Démontrer que f établit une bijection de $[0; +\infty[$ dans lui-même.

b Sans aucun calcul, donner les propriétés de l'application réciproque f^{-1} (continuité, dérivabilité, variations). Préciser les valeurs $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(8)$.

5 Représenter dans un même repère orthonormal f et f^{-1} .

Exercice 20 : Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x+3}}$.

1 Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f .

2 Montrer que, là où f est dérivable : $f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$.

3 Dresser le tableau de variation de f .

4 Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

5 Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

6 Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ que l'on déterminera à 10^{-2} près.