Fonctions de référence

Définition 1 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Exercice 1 : Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $(1,05)^{-n} > 10^{-5}$.

$n < \dfrac{5\ln(10)}{\ln(1,05)} \simeq 235,9$ donc 235.

Proposition 1 (Limites aux bornes) :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$.

Théorème 2 (Croissance comparée) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$.

Preuve : On montre ce résultat seulement pour $n = 1$:

– On étudie la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier sur $[1\,;+\infty[$ où elle y est décroissante car :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \leqslant 0.$$

Comme $f(1) = -2$, la fonction f ne prend que des valeurs négatives et on obtient :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient le résultat cherché d'après le théorème d'encadrement.

– On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) \underset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} -\dfrac{\ln u}{u} = 0^-$.

Définition 2 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de ln, notée exp, telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} \exp y = x \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x) = y. \end{array}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0.} \tag{IV.1}$$

Théorème 3 :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(1) = \mathrm{e}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp \circ \ln)(x) = x$.

Théorème 4 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x). \tag{IV.2}$$

Preuve :

– Il est inutile d'utiliser la dérivée pour montrer que exp est strictement croissante. Les propriétés des fonctions réciproques d'une fonction strictement croissante suffisent.
Donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

– La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ est bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable et dont la dérivée $\ln' : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \neq 0$ ne s'annule pas.
D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, exp est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

$$\text{On considère } f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{\ln(1-\mathrm{e}^x)}.$$

1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

La fonction ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on résout rapidement $1-\mathrm{e}^x > 0 \iff x < 0$.

De plus, $\mathrm{e}^x \neq 0 \iff 1-\mathrm{e}^x \neq 1 \iff \ln(1-\mathrm{e}^x) \neq 0$.

Donc, $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[$.

2 Déterminer et justifier rigoureusement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Pour tout $x<0$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $1-\mathrm{e}^x < 1$. On en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} 1-\mathrm{e}^x = 1^-.$$

Comme $\lim\limits_{u\to1^-} \ln(u) = 0^-$, d'après les théorèmes sur les composées de limites,

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1-e^x) = 0^-.$$

Enfin, comme $\lim\limits_{\mathrm{X}\to0^-} \frac{1}{\mathrm{X}} = -\infty$, d'après les mêmes théorèmes, on a donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3 Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

Sur $]-\infty\,;0[$, $x \longmapsto 1-\mathrm{e}^x$ est dérivable et à valeurs strictement positives donc $x \longmapsto \ln(1-\mathrm{e}^x)$ y est également dérivable. Ne s'annulant pas, son inverse f est également dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a :

$$\forall\, x \in]-\infty\,;0[\,,\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)\left(\ln(1-\mathrm{e}^x)\right)^2}.$$

4 Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

Par composition, il est tout à fait évident que f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$. Il est donc tout à fait inutile d'avoir recours au signe de la dérivée, de la question précédente même si celle-ci, du signe de $1-\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ confirme notre réponse.

La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image ($\mathbb{R}_-^*$). Elle y établit donc une bijection.

5 Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_-^*$.

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \frac{1}{\ln(1-\mathrm{e}^x)} \neq 0 \iff 1-\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \iff 0 < \mathrm{e}^x = 1-\mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \iff x = \ln\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\right).$$

Donc, $f^{-1} : y \longmapsto \ln\left(1 - e^{\frac{1}{y}}\right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $]-\infty\,;0[$ en déterminant $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0^-$.

Fonctions de référence

Définition 3 (Logarithme népérien) : On appelle fonction *logarithme népérien*, notée ln, l'unique primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Exercice 1 : Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 10^{-7}$.

$n \leqslant \dfrac{7\ln(10)}{\ln(3)} \simeq 14,7$ donc 14.

Proposition 5 (Limites aux bornes) :

- $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} \ln(x) = 1.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$

Proposition 6 (Tangentes) :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

Preuve : On reconnait un taux d'accroissement. Comme la fonction ln est dérivable en 1, on a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln 1}{x-1} = (\ln)'(1) = \left(\frac{1}{x}\right)(1) = 1.$$

À partir de la limite précédente, on pose $h = 1 + x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{h \to 1} \frac{\ln(h)}{h-1} = 1.$$

Définition 4 (Exponentielle) : On appelle fonction *exponentielle népérienne* la fonction bijection réciproque de ln, notée exp, telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\ln(x) \\ x\in\mathbb{R}_+^* \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \exp y = x \\ y\in\mathbb{R}. \end{array}\right. \qquad \exp: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto &]0\,;+\infty[\\ y & & x \text{ tel que } \ln(x)=y. \end{array}$$

En particulier, on en déduit le résultat extrêmement important :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\ \exp(x)>0.} \tag{IV.3}$$

Théorème 7 :

- L'exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$.
- $\exp(0)=1$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(\ln\circ\exp)(x)=x$.

Théorème 8 :

- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ (\exp)'(x)=\exp(x). \tag{IV.4}$$

Preuve :

– Il est inutile d'utiliser la dérivée pour montrer que exp est strictement croissante. Les propriétés des fonctions réciproques d'une fonction strictement croissante suffisent.

Donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

– La fonction $\ln:\mathbb{R}_+^*\longmapsto\mathbb{R}$ est bijective de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable et dont la dérivée $\ln':x\longmapsto\dfrac{1}{x}\neq 0$ ne s'annule pas.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, exp est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, on a :

$$(\exp)'(x)=\frac{1}{\ln'(\exp(x))}=\frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}=\exp(x).$$

On considère $f : x \longmapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right)$.

1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$ est définie si, et seulement si $\mathrm{e}^x \neq 1 \iff x \neq 0$.

La fonction $\ln$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on résout rapidement

$$\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} > 0 \iff (-1 <)\, \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0.$$

Prenant l'intersection des deux ensembles précédents, on trouve donc $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;0[$.

2 Déterminer et justifier rigoureusement $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Pour tout réel strictement négatif x, $\mathrm{e}^x < 1$ donc $1-\mathrm{e}^x > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x\to 0^-} 1-\mathrm{e}^x = 0^+$.

Comme $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 0^+} \dfrac{1}{\mathrm{X}} = +\infty$, d'après les théorèmes sur les limites de composées,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-\mathrm{e}^x} = +\infty.$$

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de produits,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^x} \times (1+\mathrm{e}^x)\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1-\mathrm{e}^x} = +\infty.$$

Enfin, $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$ et les théorèmes sur les composées de limites, entraînent

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

3 Montrer rigoureusement que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'expression de sa dérivée.

Sur $]-\infty\,;0[$, $x \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$, fonction homographique de dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et à valeurs strictement positives d'après la première question donc f y est également dérivable et on a :

$$\forall\, x \in\,]-\infty\,;0[\,,\ f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^{2x}}.$$

4 Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un ensemble que l'on ne demande pas de préciser.

D'après la question précédente, la dérivée de f est du signe de $1-\mathrm{e}^{2x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

On pouvait aussi remarquer que f est la composée de $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avec les fonctions strictement croissantes $\ln$ et $\exp$. On retrouvait le même résultat.

La fonction f est donc strictement croissante et continue (car dérivable) de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image ($\mathbb{R}_+^*$). Elle y établit donc une bijection.

5 Donner l'expression de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$. Il suffit de « retourner » l'expression :

$$y = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right) \iff \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^y \iff (1+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 1 \iff \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}^y+1} \iff x = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}^y+1}\right).$$

Donc, $f^{-1} : y \longmapsto \ln\left(\frac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}^y+1}\right)$.

Remarque : On pourra vérifier que f^{-1} est définie sur $]0\,;+\infty[$ en déterminant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.