VI

Sommes et Produits

Le signe Σ a été introduit par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1755, le symbole Π date de Gauss, mais on en trouve trace chez Descartes.

Cependant, leur usage ne s'est pas répandu immédiatement, et de nombreux mathématiciens ont continué à utiliser des points de suspension (par exemple Abel au début du $19^{\text{ème}}$ siècle)

Le but de ce chapitre est donc d'introduire et systématiser l'usage de ces symboles $\sum$ et $\prod$ pour désigner, respectivement, une somme et un produit d'éléments.

Dans la mesure du possible, l'utilisation de cette notation est préférable à celle utilisant des petits points, bien moins rigoureuse.

Contenu

Dans ce chapitre, pour deux entiers m et n tels que $m \leqslant n$, on notera $[\![m\,;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre m et n :

$$[\![m\,;n]\!] = \{m,\, m+1,\, \ldots,\, n-1,\, n\}.$$

C'est un ensemble fini à $(n-m+\boxed{1})$ éléments !

I Sommes et Produits

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la définition de la somme des éléments d'une famille finie $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de réels ou complexes (ou plus généralement d'objets qu'on sait sommer de façon commutative et associative).

On désignera dans toute la suite par E l'ensemble de ces objets sommables et $\mathbb{K}$, le corps des nombres réels ou complexes chaque fois qu'il n'y aura pas besoin de différencier les deux.

Le cas de familles infinies relève de techniques plus fines. Il n'est, en effet, pas assuré qu'une infinité de sommes ou produits soit un procédé qui « converge ». Nous reparlerons de cela plus tard.

I.1 Généralités

Définition 1 : Soit I un sous ensemble **fini** non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.

On note :

- $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$, la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.
- $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i$, le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.

Par convention, lorsque $\mathrm{I} = \varnothing$, $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i = 1$.

Notations : Dans le cas où $\mathrm{I} = [\![m\,;n]\!]$ avec $m \leqslant n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

Somme et produit de $(n - m + \boxed{1})$ termes ou facteurs.

Remarques :

— L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 : L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{❀=m}^{n} a_{❀} = \prod_{j\in[\![m\,;n]\!]} a_j.$$

— Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}$, les nombres m et n représentent les bornes et il est implicite que $m \leqslant n$.

Dans le cas contraire, $[\![m\,;n]\!] = \varnothing$ et donc $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

— Dans la notation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$, il est aussi implicite que l'indice k augmente de 1 lorsque l'on passe d'un terme au suivant (idem pour le produit).

Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} k$, qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15, mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}(2k+1)$.

Exemples 2 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$.
- $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n}\sqrt{p}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}$,

  mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sqrt{2p}=\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n}$.
- $\forall\,\alpha\in\mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\alpha=\underbrace{\alpha+\ldots+\alpha}_{\text{n-m+1 fois}}=(n-m+\boxed{1})\alpha$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}\alpha=\alpha^{n-m+\boxed{1}}$.
- Un petit dernier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{k}=\mathrm{e}^{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)}$.

ATTENTION

Ne pas confondre :

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+n$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k+1$. Les parenthèses font toute la différence.

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{2^k}$, somme de n termes avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}2^k$, somme de 2^n termes.

Exercice 1 : Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}(k+2)$.
2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}(j^2-2)$.
3. $\displaystyle\prod_{i=3}^{7}\frac{i-1}{i+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1$.
6. $\displaystyle\sum_{p=1}^{2024}(-1)^p$.
7. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}1$.
8. $\displaystyle\prod_{i=6}^{6}i^3$.
9. $\displaystyle\sum_{k=103}^{103}a_k$.

Exercice 2 : Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ.

1. $\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 10$
2. $1000+1010+1020+\cdots+1540$
3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$
4. $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$
5. $1-2+3-4+5-6+\cdots+1001$
6. $2+4+6+8+\cdots+1024$
7. $5+7+9+11+\cdots+501$
8. $5-7+9-11+\cdots+501$

Exemples 3 (Bis) : On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k\pi}{n}},\ k\in[\![0\,;n-1]\!]\right\}$, l'ensemble des *racines n-ièmes de l'unité*.

  La somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k\pi}{n}}\quad\text{et}\quad\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k\pi}{n}}.$$

- Si $G = \{ (i\,;j) \in \mathbb{N}^2 \,/\, i+j=5\} = \{(0\,;5)\,,(1\,;4)\,,(2\,;3)\,,(3\,;2)\,,(4\,;1)\,,(5\,;0)\}$ alors
$$\sum_{(i;j)\in G} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10}+\frac{1}{9}+\frac{2}{8}+\frac{3}{7}+\frac{4}{6}+\frac{5}{5}.$$
- $\displaystyle\sum_{i\in E} 1 = |E|$, autant de 1 que d'éléments dans E.

I.2 Premières propriétés

Proposition 1 (Relation de Chasles) : Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i\in I\cup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I\cup J}^{n} a_i = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in J} a_i.$$

En particulier si $m \in [\![1\,;n]\!]$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i.$$

En particulier, pour tout $a \in E$, $\displaystyle\sum_{i\in I} a = a \times |I|$.

La proposition (1) justifie les regroupements de termes dans les sommes finies : on décompose la somme de départ en plusieurs sommes plus simples a calculer.

Elle se généralise aisément à une réunion $I_1 \sqcup I_2 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ d'ensembles **deux à deux disjoints** ou à toute *partition* de I :

$$\sum_{i\in I_1\sqcup I_2\sqcup\ldots\sqcup I_n} a_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right).$$

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) : Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I.

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + b_i) = \lambda\left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right). \qquad \text{(Linéarité de la somme)}$$

$$\prod_{i\in I} (\lambda a_i b_i) = \lambda^{|I|}\left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right). \qquad \text{(Multiplicativité du produit)}$$

En particulier, $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} (\lambda a_i) = \lambda^{n-p+1} \prod_{i=p}^{n} a_i$.

ATTENTION

En général et même presque toujours, on n'a pas :

$$\cancel{\sum_{i=p}^{n}(a_i \times b_i) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=p}^{n}(b_i)\right)} \quad \text{et} \quad \cancel{\prod_{i=p}^{n}(a_i + b_i) = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right) + \left(\prod_{i=p}^{n}(b_i)\right)}.$$

La multiplication n'est pas linéaire mais distributive sur l'addition.

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left|\prod_{i\in I} a_i\right| = \prod_{i\in I} |a_i|$ mais $\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i|$.

ATTENTION

Si l'union $I = I_1 \cup I_2$ n'est pas nécessairement disjointe, on retrouve, comme pour les cardinaux, probabilités et autres statistiques :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i - \sum_{i\in I_1\cap I_2} a_i.$$

I.3 Factorielle

Définition 2 (Factorielle) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *factorielle* n, noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$
- ...

ATTENTION

Ne pas confondre avec $\prod_{k=1}^{n} n = n^n$.

Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n+1)!$, $(2n)! \neq 2n!$ et $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!$.

Exercice 3 : Simplifier :

1. $\dfrac{8!}{6!}$
2. $\dfrac{11!}{9!2!}$
3. $\dfrac{13!-12!}{12!}$
4. $\dfrac{4}{12!}-\dfrac{4}{11!}+\dfrac{4}{10!}$

II Méthodes de calculs de sommes et de produits

II.1 Somme et produits télescopiques

Lorsque l'expression à sommer est de la forme $u_{k+1}-u_k$, les termes s'éliminent alors deux à deux et il ne reste alors que le premier et le dernier terme :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_m.} \tag{VI.1}$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_m}.}$$

Exercice 4 : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right).$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}.$
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right).$

II.2 Changement d'indice

Il arrive qu'on ait besoin de réindexer une somme (changer l'indice).

Les trois remarques simples suivantes amènent à des techniques pour simplifier des sommes :

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}.$$

Exemple 5 : Si on considère $\mathrm{S}=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_{k-1}$, on a $\mathrm{S}=a_0+a_1+\dots+a_{98}+a_{99}$.

On constate qu'on peut aussi noter $\mathrm{S}=\displaystyle\sum_{i=0}^{99}a_i$, et on a :

$$\sum_{k=1}^{100}a_{k-1}=\sum_{i=0}^{99}a_i.$$

Méthode 1 (Changement d'indice) :
Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

1. *On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.*
2. *Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.*
3. *On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.*

On prendra garde aussi à ni ajouter ni oublier des termes de l'expression par ce nouvel indiçage.

Exercice 5 : Écrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole Σ puis proposer une autre écriture, avec le symbole Σ. *On ne demande pas de calculer ces sommes !*

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$
2. $\sum_{k=3}^{n-2} \ln(k+2)$
3. $\sum_{k=5}^{3n} \ln(k-1)$
4. $\sum_{k=0}^{n} \ln n$

2 Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

Exercice 6 : À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

Correction : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \underset{\substack{\uparrow \\ j=n-k}}{=} \sum_{j=0}^{n} (n-j) \underset{\text{linéarité de la somme}}{=} n\sum_{j=0}^{n} 1 - \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1) - S_n.$

S_n est donc solution de l'équation $S_n = n(n+1) - S_n \iff S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 Regrouper une somme finie selon les indices de même parité donne le même résultat :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n} = (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) \quad + \quad (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$$
$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{2k}\right) \quad + \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\right).$$

De manière un peu plus formelle, une numérotation des éléments d'un ensemble I consiste en une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathrm{I}$.

Une telle bijection définit donc une numérotation $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_n\}$ où $i_k = \varphi(k)$. C'est l'existence d'une telle bijection qui permet d'ailleurs aussi de définir rigoureusement la notion de cardinal. [1]

Via la bijection décrite ci-dessus, on voit que toute somme pourrait s'indexer sur un intervalle d'entiers :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

L'indexation ensembliste n'est qu'une commodité permettant parfois d'avoir à expliciter une bijection.

Théorème 0 (Changement d'indice) : Soient I et J deux ensembles et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection. Alors, pour toute famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on a :

$$\sum_{j\in \mathrm{J}} a_j = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_{\varphi(i)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{j\in \mathrm{J}} a_j = \prod_{i\in \mathrm{I}} a_{\varphi(i)}.$$

[1]. Soit E un ensemble fini et une numérotation définie par une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathrm{E}$, il vient :

$$|\mathrm{E}| = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Ainsi, on retrouve la définition usuelle du cardinal, comme étant l'unique n tel qu'il existe une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur E.

Cette formule ne fait que traduire le fait que lorsque i parcourt I, les $\varphi(i)$ prennent une et une seule fois chaque valeur j de J, du fait de la bijectivité de φ.

En appliquant ce résultat à la bijection réciproque φ^{-1}, on a alors aussi, pour toute famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$:

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{j\in\mathrm{J}} a_{\varphi^{-1}(j)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\mathrm{I}} a_i = \prod_{j\in\mathrm{J}} a_{\varphi^{-1}(j)}.$$

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 4 (Changements d'indice) : Soit $(a_i)_{m\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i+\ell$ ou $i = j-\ell$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Inversion de compteur : en posant $j = n+m-i$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_{n+m-j}.$$

Décomposition indice pairs/impairs : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} a_{2j+1}$

Exemple 6 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2.$

Exercice 7 : Calculer grâce à un changement d'indice :

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{95} \frac{1}{6^k}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1515}^{2013} i$
3. $\displaystyle\sum_{j=-2}^{40} (6j+4)$
4. $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} p$

II.3 Sommes de référence

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) : Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathrm{S}_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \mathrm{S}_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\mathrm{S}_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Preuve : Toutes ces formules ont été démontrées par récurrence en terminale ou en début d'année mais les démonstrations directes sont possibles à l'aide de sommes télescopiques.

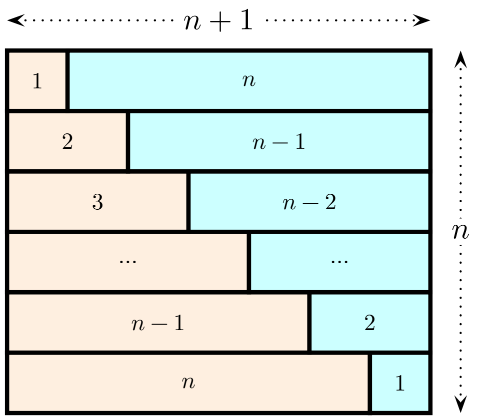

Figure VI.1 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

On pourrait d'ailleurs, généraliser ces démonstrations aux somme des puissances p-ième des entiers naturels.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

– D'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\mathrm{S}_1(n)+n$ et, par télescopage $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2 = (n+1)^2-1$.

En identifiant, on trouve donc $\mathrm{S}_1(n) = \dfrac{(n+1)^2-n-1}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

– Pour $\mathrm{S}_2(n)$ on utilise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3 = (n+1)^3-1$.

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3 = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\mathrm{S}_2(n)+3\mathrm{S}_1(n)+n$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \mathrm{S}_2(n) &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-3\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)\right] \\
&= \frac{(n+1)(2(n+1)^2-2-3n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

– Enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-k^4 = (n+1)^4-1$ mais aussi :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-k^4 = (n+1)^4-1 = 4\mathrm{S}_3(n)+6\mathrm{S}_2(n)+4\mathrm{S}_1(n)+n.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } 4\mathrm{S}_3(n) &= (n+1)^4-1-6\mathrm{S}_2(n)-4\mathrm{S}_1(n)-n \\
&= (n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1) \\
&= (n+1)(n^3+n^2) = n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{S}_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

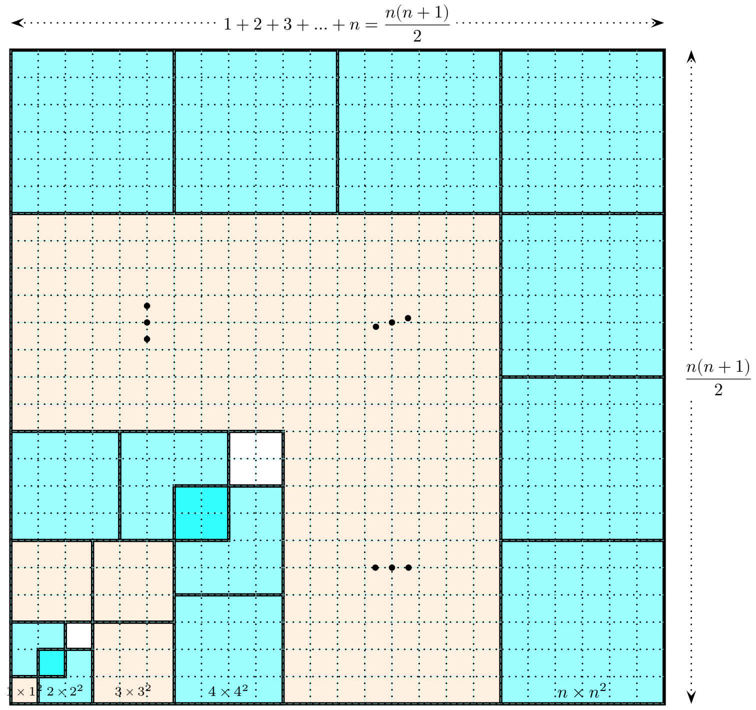

Figure VI.2 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

C'est là qu'on revient sur les connaissances des petites classes.

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \overbrace{\frac{u_m+u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}.$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si} \quad q=1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \dfrac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1-q}, & \text{si} \quad q\neq 1. \end{cases}$$

Exemple 7 : À l'aide de 1, on généralise très facilement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ pour $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Preuve : Déjà fait maintes fois ...

Posons $S = \sum_{k=m}^{n} u_k$.

– Pour une suite arithmétique de raison r :

$$2S = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_k$$

En réindexant la deuxième somme en partant de la fin, on a :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_{n+m-k} = \sum_{k=m}^{n} (u_k + u_{n+m-k}) \\
&= \sum_{k=m}^{n} (u_m + (k-m)r + u_m + (n + \cancel{m} - k - \cancel{m})r) \\
&= \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_m + (n-m)r) = \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_n) \\
&= (n-m+1)(u_m + u_n).
\end{aligned}$$

Donc, $S = (n-m+1)\dfrac{u_m + u_n}{2}$.

On peut également adopter une méthode plus visuelle et plus historique :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & S & = & u_m & + & u_m + r & + & \dots & + & u_n - r & + & u_n \\
+ & S & = & u_n & + & u_n - r & + & \dots & + & u_m + r & + & u_m \\
 & 2S & = & \multicolumn{7}{c}{\underbrace{(u_m + u_n) + (u_m + u_n) + \dots + (u_m + u_n)}_{n-m+1 \text{ termes}}} & &
\end{array}$$

Donc $S = (n-m+1)\dfrac{u_m + u_n}{2}$.

– Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $S = \sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m$.

En multipliant S par $1 - q \neq 0$:

$$\begin{aligned}
(1-q)S = (1-q)\sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m &= \sum_{k=0}^{n-m} q^k u_m - \sum_{k=0}^{n-m} q^{k+1} u_m \\
&= u_m \sum_{k=0}^{n-m} (q^k - q^{k+1}) \\
&= u_m \times (1 - q^{n-m+1}).
\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } S = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}.$$

Si $q = 1$, on revient à la définition : $S = \sum_{k=m}^{n} u_m = (n-m+1)u_m$.

Exemple 8 : Si $\theta \neq 0$, $1 + e^{\theta} + e^{2\theta} + \dots + e^{n\theta} = \dfrac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^{\theta}} = \dfrac{\operatorname{sh}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{\frac{n\theta}{2}}$.

Exemple 9 : À l'aide de 2, on obtient en particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}\right).$$

On peut généraliser cette relation.

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exemple 10 : On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k a^{2p-k}b^k \\ &= (a+b)(a^{2p} - a^{2p-1}b + a^{2p-2}b^2 + \dots - ab^{2p-1} + b^{2p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \qquad & x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ x^3 + 1 &= (x+1)(x^2-x+1) \qquad & x^5 + 1 &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1). \end{aligned}$$

Preuve : Une très facile utilisation du télescopage :

$$\begin{aligned} (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{a^{n-k}b^k}_{u_k} - \underbrace{a^{n-(k+1)}b^{k+1}}_{u_{k+1}}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{On reconnait une différence}\\ \text{de la forme } u_k - u_{k+1}\end{array}\right) \\ &= a^n - b^n. \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Il ne reste que les}\\ \text{termes extrêmes.}\end{array}\right) \end{aligned}$$

Remarque : Si P est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe Q fonction polynomiale de degré $n-1$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z) - \mathrm{P}(\lambda) = (z-\lambda)\mathrm{Q}(z).$$

On peut aller plus loin :

Corollaire 0.1 (Racine et factorisation) : Soient P une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ *i.e.* λ est une racine de P.

(ii) Il existe une fonction polynomiale Q telle que $\mathrm{P}(z) = (z-\lambda)\mathrm{Q}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Preuve : Notons a_0, ..., a_n les coefficients de P, de sorte que $\mathrm{P}(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

L'implication (ii) $\implies$ (i) est triviale.

Réciproquement, faisons l'hypothèse que $\mathrm{P}(\lambda)=0$. $\forall z\in\mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z)=\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(\lambda) \underset{\substack{\text{linéarité}\\ \text{de la somme}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\left(z^k-\lambda^k\right) \underset{a_0(z^0-\lambda^0)=0}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k\left(z^k-\lambda^k\right)$$

$$\underset{\text{théorème (7)}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k(z-\lambda)\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{k-i-1}z^i \underset{\substack{\text{linéarité}\\ \text{de la somme}}}{=} (z-\lambda)\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} a_k\lambda^{k-i-1}z^i$$

$$=(z-\lambda)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k\lambda^{k-i-1}\right)z^i=(z-\lambda)\mathrm{Q}(z) \quad \text{en posant } \mathrm{Q}(z)=\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k\lambda^{k-i-1}\right)}_{b_i}z^i.$$

La fonction $\mathrm{Q}: z\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$ est bien polynomiale, c'est fini !

II.4 Relation Produit-somme

Théorème 8 : Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p\leqslant n$, on a alors :

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)=\sum_{k=p}^{n}\ln\left(a_k\right) \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right)=\prod_{k=p}^{n}\mathrm{e}^{a_k}.$$

Preuve : Rien à démontrer si ce n'est remarquer la stricte positivité de tous les a_i et appliquer les morphismes ln et exp.

Remarque : Pour la deuxième formule, il est inutile de supposer les a_i non nuls ou positifs.

III COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

Vous avez déjà rencontré les coefficients binomiaux en terminale dans un contexte combinatoire lorsque vous dénombriez le nombres de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments ou le nombre de chemins à k succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n.

Ce paragraphe prolonge et consolide vos connaissances.

III.1 Coefficients binomiaux

Définition 3 (Coefficients binomiaux) : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0 & \textit{sinon}.\end{cases}$$

Remarque : Considérer $k \in \mathbb{Z}$ n'amène pas à se demander ce que pourrait signifier $k!$ avec k négatif mais est une convention voulu par le programme afin d'éviter des disjonctions de cas inconséquentes.

Nous redémontrerons plus tard que $\dbinom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de cardinal n ou encore le nombre de Combinaisons à k éléments parmi un ensemble à n éléments, ce qui justifie l'ancienne notation $C_{nk} = \dbinom{n}{k}$.

Exemples II : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$ et pour $n \geqslant 2$, $\dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : Pour les calculs des $\dbinom{n}{k}$, on utilisera souvent la forme « simplifiée » :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.}$$

On peut noter que le numérateur et le dénominateur comptent autant de facteurs.

Cette formule permet, d'ailleurs d'étendre la définition des coefficients binomiaux à tout réel x (k dans $\mathbb{N}$ cette fois) en posant :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Il y a de grandes chances que vous rencontriez cela dans un de vos sujets de concours tellement la théorie et les propriétés qui se cachent derrière cette formules sont nombreuses et florissantes.

Exercice 8 : Simplifier $\dfrac{\dbinom{n+1}{n}}{\dbinom{n}{1}}$ et $\dfrac{\dbinom{n}{p}}{\dbinom{n-1}{p+1}}$.

Proposition 9 : Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** $\boxed{\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}.}$
4. **Intégralité :** $\dbinom{n}{k}$ est un entier naturel.

L'assertion ($\boxed{1}$) de la **proposition** (9) permet de compléter les premières valeurs de l' **exemple** (11) :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\binom{n}{k}$ de proche en proche. Les résultats sont le tableau ci-dessous appelé *triangle de Pascal*[2].

	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$
$\vdots$				
n		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$			$\binom{n+1}{k+1}$	
$\vdots$				

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	**1**	**1**				
2	1	**2**	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	**6**	**4**	1	
5	1	5	10	**10**	5	1

Symétrie

Figure VI.3 – Triangle de Pascal

Preuve : Pour alléger la démonstration, on se limitera au cas ou les coefficients binomiaux ne sont pas nuls, les résultats étant trivialement vrais dans ces cas.

$\boxed{1}$ Si $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $0 \leqslant n-k \leqslant n$ et on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{(n)!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

$\boxed{2}$ Si $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

[2]. **Blaise Pascal**, né le 19 juin **1623** à Clermont (aujourd'hui Clermont-Ferrand), en Auvergne, mort le 19 août **1662** à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.
Enfant précoce, il est éduqué par son père. Les premiers travaux de Pascal concernent les sciences naturelles et appliquées. Il contribue de manière importante à l'étude des fluides. Il a clarifié les concepts de pression et de vide, en étendant le travail de Torricelli. Pascal a écrit des textes importants sur la méthode scientifique.
À 19 ans, il invente la première machine à calculer et après trois ans de développement et 50 prototypes, il la présente à ses contemporains en la dédiant au chancelier Séguier. Dénommée machine d'arithmétique, puis roue pascaline et enfin pascaline, il en construisit une vingtaine d'exemplaires dans la décennie suivante.
Mathématicien de premier ordre, il crée deux nouveaux champs de recherche majeurs : tout d'abord il publie un traité de *géométrie projective* à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donnant naissance au cours du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

$\boxed{3}$ Si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} &= \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} - \binom{n}{k} = \left(\frac{n+1}{k+1} - 1\right)\binom{n}{k} \\ &= \frac{\cancel{n-k}}{k+1} \times \frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)} \times (n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \binom{n}{k+1}.\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Le dernier résultat se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{P}(n) : \ \forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\binom{0}{k} = 0 \in \mathbb{N}$. La propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier p tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée et soit $k \in [\![0\,;p+1]\!]$.

Si $k = p+1$ alors $\binom{p+1}{p+1} = 1 \in \mathbb{N}$.

Sinon, d'après $\boxed{3}$ de la proposition (9) , on a :

$$\binom{p+1}{k} = \binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \qquad \text{avec } k \in [\![0\,;p]\!]\,.$$

On peut alors invoquer l'hypothèse de récurrence pour chacun des deux termes de droite et conclure à $\binom{p+1}{k} \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas, la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée et la propriété $\mathcal{P}$ héréditaire.

Étant initialisée à $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Ce n'est pas une récurrence forte.

Un peu d'histoire : *Le triangle des coefficients binomiaux, que nous appelons communément « triangle de Pascal » était en fait connu depuis bien longtemps déjà lorsque Blaise Pascal s'y intéressa : on y trouve mention déjà chez Halayudha, mathématicien indien du 10$^{\text{ème}}$ siècle, ainsi qu'en Chine au 13$^{\text{ème}}$ siècle. La contribution de Pascal a essentiellement été de démontrer en 1654 un grand nombre de propriétés de ce triangle, jusque-là admises.*

C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a mis au point le principe de la démonstration par récurrence *!*

III.2 Binôme de Newton

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) : Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif [3] et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}. \qquad \text{(VI.2)}\\ &= a^n + na^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Remarque : Il est parfois plus avantageux d'écrire cette formule en inversant les rôles de a et b sous la forme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Preuve : On démontre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Au rang 0, les deux formules donnent 1 donc la propriété est initialisée.

Supposons la propriété vérifiée pour un rang $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^{p+1} = (a+b)(a+b)^p &\underset{\text{Hypothèse de récurrence}}{=} a\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^k\, b^{p-k} + b\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^k\, b^{p-k}\\
&\underset{\text{Linéarité de la somme}}{=} \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^{k+1}\, b^{p-k} \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^k\, b^{p+1-k}\\
&\underset{\text{Changement d'indice dans la première somme}}{=} \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1} a^k\, b^{p+1-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} a^k\, b^{p+1-k}\\
&\underset{\text{On regroupe et factorise les somme sur } [\![1\,;p]\!]}{=} \underbrace{\binom{p}{p}}_{=1!} a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right) a^k\, b^{p+1-k} + \underbrace{\binom{p}{0}}_{=1!} b^{p+1}\\
&\underset{\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}=\binom{p+1}{k}}{=} \underbrace{\binom{p+1}{0}}_{=1!} a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k} a^k\, b^{(p+1)-k} + \underbrace{\binom{p+1}{p+1}}_{=1!} b^{p+1}\\
&\underset{\text{On regroupe}}{=} \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k} a^k\, b^{(p+1)-k}\\
&\underset{\text{On reconnaît}}{=} (a+b)^{p+1}.\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée au rang 0, elle est donc vraie pour tout entier n.

[3]. *i.e.* un anneau dont les DEUX lois $+$ et $\times$ sont commutatives. Surtout le produit !

ATTENTION Il est très important que l'ensemble contenant a et b soit commutatif pour la loi multiplicative sinon cette formule est fausse. Ceux parmi vous qui ont suivi l'option mathématiques expertes l'année dernière devraient s'en souvenir.

Un peu d'histoire : *L'apport de Newton est bien réel et important, mais ne concerne pas les exposants entiers naturels.*

Isaac Newton a, en fait, généralisé cette formule pour tout exposant ***réel****, sous forme d'une somme infinie.*

Exemples 12 :

- $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k\, b^{n-k}$

$$= a^n - na^{n-1}b + \dots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + (-1)^{n-1}nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$$

- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Pour $a = -b = 1$, on obtient $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
- Si $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \underset{\text{Formule du capitaine}}{=} \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \underset{\text{On factorise}}{=} n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.

$$\underset{k \leftarrow k-1}{=} n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \underset{(1+1)^{n-1}}{=} n \times 2^{n-1}$$

Exemple 13 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k.$$

Exercice 9 : Développer :

1. $(x-y)^3$
2. $(1+x\sqrt{2})^4$
3. $(2-x)^5$

Exemple 14 (Application au calcul des sommes de puissances d'entiers) : En reprenant les notations du théorème (5),

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

On peut calculer les $\mathrm{S}_n(p)$ de proche en proche à l'aide de la formule du binôme (VI.2) et en considérant la somme :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} \left((1+k)^{p+1} - k^{p+1}\right).$$

La somme S peut alors être calculée de deux façons :

- D'une part, comme somme télescopique : $\mathrm{S} = (1+k)^{n+1} - 0^{n+1} = (1+k)^{n+1}$.
- D'autre part, à l'aide de la formule du binôme (VI.2), ce qui fait disparaitre les termes d'exposant $p+1$.

On isole ensuite les termes d'exposant p pour reconnaître les expressions cherchées de $\mathrm{S}_n(p)$.

IV Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées sur un produit cartésien (ou au moins un sous-ensemble). Soit R [4] un sous-ensemble de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ et $(a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{R}}$ une famille doublement indexée *i.e.* indexée sur un produit cartésien.

Le but est d'étudier la somme $\displaystyle\sum_{(i;j)\in\mathrm{R}} a_{i,j}$ en se ramenant à des sommes portant sur un seul des deux indices. On parle alors de « coupe » de l'ensemble R.

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) : Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E.

On note :

- $\displaystyle\sum_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.
- $\displaystyle\prod_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

Si la famille est indexée par des couples $(i\,;j)$ vérifiant une condition du type $i \leqslant j$, $i < j$, $i \geqslant j$, ou $i > j$, on dit que la somme ou le produit est *triangulaire*, et on note :

- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}\\ i<j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$

Exemples 15 :

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{57}{60}$
- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{19}{20}$
- $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{360}$
- $\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

Notations : Lorsque $\mathrm{I} = [\![m\,;n]\!]$ et $\mathrm{J} = [\![p\,;q]\!]$, la somme de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ se note :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} \ \text{ si } \mathrm{I} = \mathrm{J} = [\![m\,;n]\!].$$

ATTENTION Dans la dernière écriture, l'expression $m \leqslant i,j \leqslant n$ n'est permise que si i et j sont deux variables indépendantes.

[4]. R comme rectangle.

IV.1 Permutation des symboles Σ

Théorème 11 (Somme double indexée par un rectangle) : Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!]\times[\![p\,;q]\!]$.

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Dans le cas d'un rectangle, les sommes permutent donc sans contraintes.

Preuve : On dispose les a_{ij} dans un tableau à double entrée.

Il s'agit dans les deux cas de calculer la somme de tous les éléments du tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	...	q	Total
m	$a_{m\,p}$	$a_{m\,p+1}$	...	$a_{m\;q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m\,j}$
$m+1$	$a_{m+1\,p}$	$a_{m+1\,p+1}$	...	$a_{m+1\;q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m+1\,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{n\,p}$	$a_{n\,p+1}$	...	$a_{n\;q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{n\,j}$
Total	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,p}$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,p+1}$	...	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,q}$	$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ / $\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$

- en sommant d'abord chaque ligne d'indice i, $\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ puis en sommant toutes les lignes $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$.
- en sommant d'abord chaque colonne d'indice j, $\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$ puis en sommant toutes les colonnes $\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$.

Théorème 12 (Somme double indexée par un triangle) : Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de E indexée par le triangle

$\{(i\,;j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n} \sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

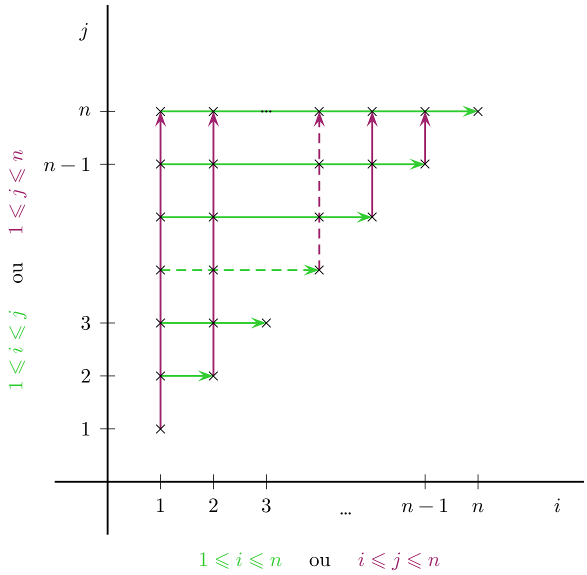

Figure VI.4 – Sommation par tranches

Preuve : De même, on dispose les a_{ij} dans un tableau à double entrée mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments a_{ij} où $i \leqslant j$.

$i \backslash j$	m	$m+1$	...	n	Total
m	$a_{m\,m}$	$a_{m\,m+1}$	...	$a_{m\,n}$	$\displaystyle\sum_{j=m}^{n} a_{m\,j}$
$m+1$		$a_{m+1\,m+1}$	...	$a_{m+1\;\;n}$	$\displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1\,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				$a_{n\;\;n}$	$\displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n\,j}$
Total	$\displaystyle\sum_{i=m}^{m} a_{i\,m}$	$\displaystyle\sum_{i=m}^{m+1} a_{i\,m+1}$	...	$\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i\,n}$	$\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$; $\displaystyle\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}$

Si l'on somme sans prendre la diagonale *i.e.* les termes a_{ii}, $i \in [\![1\,;n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{m \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

Exercice 10 : Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Correction : *En choisissant astucieusement l'ordre de sommation, il vient :*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\cancel{j}} \times \frac{\cancel{j}(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Proposition 13 (Produit de deux sommes) : Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ deux familles d'éléments de E.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j.$
- $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$ (Carrée d'une somme)

Preuve :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \times \sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \right).$

  Et il suffit d'appliquer le théorème (11).
- *Pour le carré d'une somme, on fait intervenir la symétrie du tableau double entrée en séparant la somme en trois parties et en remarquant que le triangle supérieur est identique au triangle inférieur :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}^{n} a_i a_j$$
$$= \overbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_i a_j}^{\text{Triangle supérieur}} + \overbrace{\sum_{1 \leqslant i = j \leqslant n}^{n} a_i a_j}^{\text{Diagonale}} + \overbrace{\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n}^{n} a_i a_j}^{\text{Triangle inférieur}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_i a_j$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.

Exemple 16 : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

IV.2 Permutation des symboles Π

Les résultats précédents du théorème (11) et du théorème (12) s'étendent de façon immédiate si on remplace « somme double » par « produit double » :

Théorème 14 : Soit $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par un rectangle $[\![m\,;n]\!] \times [\![p\,;q]\!]$ ou un triangle $\{\,(i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

On a :

Sur un rectangle : $$\prod_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} a_{ij} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Sur un triangle : $$\prod_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=i}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m}^{n}\prod_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

(sans la diagonale) $$\prod_{m\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m+1}^{n}\prod_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$$

Exemple 17 :
$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\prod_{j=1}^{n} j^2\right) .\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2\right) = \prod_{i=1}^{n}(i^n n!^2)\\ &= (n!)^{2n}\times\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n = (n!)^{2n}\times(n!)^n = (n!)^{3n}.\end{aligned}$$

Exercice 11 : Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} z_{ij}$?

Correction : Pour $m=1$ et $n=2$, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{2} z_{ij} = z_{11}+z_{12}$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\prod_{i=1}^{1} z_{ij} = z_{11}z_{12}$ donc non si les z_{ij} sont non nuls ! ...

Index