Fonctions de référence

1 (a) Notons $\mathscr{D}_h$ le domaine de définition de h. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathscr{D}_h \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R}_+^*}$

Commentaires : S'il faut que $2x$ soit strictement positif que $\ln(2x)$ soit défini. Cela doit également suffire. Les raisonnements sur les domaines de définition sont donc des raisonnements par équivalence.

(b) Puisque $\mathscr{D}_h$ n'est pas un ensemble symétrique par rapport à 0, on en déduit directement que :

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

Commentaires : Tout à fait inutile de calculer $f(-x)$…

(c) Soit $x > 0$. On a :

$$h(x) = x^2 + 2x(1 - \ln(2x)) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln(2)}{x} = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = 1.$$

D'après les théorèmes sur les limites de produits : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$

Au voisinage de 0, pour tout $x > 0$, on a aussi :

$$h(x) = x^2 + 2x - 2x\ln(2) - 2x\ln(x).$$

Or, par croissance comparée, $x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

D'après les théorèmes sur les imites de sommes, on a donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = 0.}$

Commentaires : On verra plus tard, que l'on peut alors prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

(d) Sur $\mathbb{R}_+^*$, h est une somme de fonctions dérivables donc elle l'y est également et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 2x + 2(1 - \ln(2x)) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) = 2x + 2 - 2\ln(2x) - 2 = 2x - 2\ln(2x),$$

du signe de $x - \ln(2x)$.

Commentaires : La convexité n'est pas au programme de PTSI cependant elle l'était à celui de terminale donc why not l'utiliser en écrivant que, par convexité de ln, celle-ci est en dessous de ses tangentes et en particulier de celle en 0 pour écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - 1 \geqslant \ln(x) \iff x - 1 \geqslant \ln(2x) - \ln(2) \iff x - \ln(2x) \geqslant 1 - \ln(2) > 0.$$

$h_1 : x \longmapsto x - \ln(2x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$h_1'(x) = 1 - \frac{1}{x}, \text{strictement positif si, et seulement si } 1 > \frac{1}{x} > 0 \textit{ i.e. } x > 1.$$

On en déduit le tableau de variation de h_1 :

x	0		1		$+\infty$
$h_1'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h_1	$\|\|$	$\searrow$	$1-\ln(2)>0$	$\nearrow$	

Le minimum de $f' = 2h_1$ sur $]0\,;+\infty[$ étant positif, on en déduit que :

$$\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[\,,\; h'(x) > 0.$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	
h	$\|\|$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Commentaires : *A priori, personne ne nous a dit que l'on avait ou que l'on pouvait prolongé h par continuité en 0 donc, il me semble plus correct de mettre une double barre en 0.*

2 (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{h(x)}{x} = x + 2(1-\ln(2x)) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[]{x\to+\infty} 0.$

D'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Et, d'après les théorèmes sur les limites de produits,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } h \text{ admet une branche parabolique de direction } (\mathrm{O}y) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(b) D'après la question précédente, on a déjà :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{H}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a aussi :

$$\frac{\mathrm{H}(x)}{x} = \frac{h(x)}{x^2} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}.$$

De même que précédemment, on en déduit rapidement que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{H}(x)}{x} = 1.$$

$\boxed{\text{Le graphe de H admet une branche parabolique de direction } y = x \text{ au voisinage de } +\infty.}$

Admet-il une asymptote oblique ? Pour cela, on étudie la limite de $\mathrm{H}(x) - x$ en $+\infty$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{H}(x) - x = x\left(\frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 2 - \ln(2) - \ln(x)$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{H}(x) - x = -\infty$ et $\boxed{\text{le graphe de H n'admet pas de droite asymptote en } +\infty.}$

3 La fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$. $\boxed{\text{Elle admet donc 0 comme minorant.}}$

Comme il n'est pas atteint, $\boxed{h \text{ n'a donc pas de minimum sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Commentaires : *On pouvait montre qu'aucun minimum ne pouvait exister en supposant le contraire et en prenant la valeur de sa moitié pour montrer l'absurdité mais devant la trivialité de la chose je pense que c'est bon.*

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'admet ni majorant, ni maximum.}}$

4 D'après le tableau de variation, trouvé en 1 d, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y est injective.

Comme h ne prend pas de valeurs négatives, $\boxed{\text{elle ne peut être surjective sur } \mathbb{R}.}$

5 Toujours d'après 1 d, h est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle établit donc une $\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur son image } h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*.}$

6 On a déjà vu dans les questions précédentes que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 2x - 2\ln(2x) \geqslant h'(1) > 0.$$

Sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ (ouvert), la fonction h est donc dérivable et telle que sa dérivée ne s'annule jamais. Sa fonction réciproque $\boxed{\varphi \text{ est donc dérivable sur } \mathrm{J} = h(\mathrm{I}) = \mathbb{R}_+^*}$ et on a :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{h'(\varphi(y))} = \frac{1}{2\varphi(y) - 2\ln(2\varphi(y))}.$$

Conclusion, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\varphi(y) - 2\ln(2\varphi(y))}.}$$

Commentaires : *La seule chose que le correcteur regardera est si vous avez bien précisé que la dérivée de h ne s'annulait pas (et non h !) sur un intervalle ouvert. On reviendra sur le côté ouvert plus tard.*