Sommes et Produits

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Mars 2024

Sommaire I

Dans ce chapitre, pour deux entiers m et n tels que $m \leqslant n$, on notera $[\![m\,;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre m et n :

$$[\![m\,;n]\!] = \{m,\, m+1,\, \dots,\, n-1,\, n\}.$$

C'est un ensemble fini à $(n - m + \boxed{1})$ éléments !

I. Sommes et Produits

Définition 1 :

Soit I un sous ensemble fini non vide d'entiers et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.

On note :

- $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$, la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.
- $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i$, le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ où chaque indice $i \in \mathrm{I}$ apparaît une et une seule fois.

Par convention, lorsque $\mathrm{I} = \varnothing$, $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i = 1$.

Notations : Dans le cas où $\mathrm{I} = [\![m\,; n]\!]$ avec $m \leqslant n$, on utilisera la notation plus commode :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_n.$$

Somme et produit de $(n - m + \boxed{1})$ termes ou facteurs.

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 :

L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{\text{❀}=m}^{n} a_{\text{❀}} = \prod_{j \in [\![m;n]\!]} a_j.$$

Remarques :

- L'indice i est un indice « muet » *i.e.* on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs et on emploiera souvent k aussi par habitude ou préférence.

Exemple 1 :

L'indice n'a aucune signification particulière en dehors de la somme ou du produit.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{❀=m}^{n} a_{❀} = \prod_{j \in [\![m\,;n]\!]} a_j.$$

- Dans l'écriture $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}$, les nombres m et n représentent les bornes et il est implicite que $m \leqslant n$. Dans le cas contraire, $[\![m\,;n]\!] = \varnothing$ et donc $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

Remarques :

- Dans la notation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$, il est aussi implicite que l'indice k augmente de 1 lorsque l'on passe d'un terme au suivant (idem pour le produit).
  Par exemple, la somme des entiers impairs de 1 à 15 ne s'écrit pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} k$, qui correspond à la somme de tous les entiers de 1 à 15, mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}(2k+1)$.

Exemples 2 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$

Exemples 2 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$
- $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + ... + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$

  mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + ... + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$

Exemples 2 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$
- $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n},$

  mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \ldots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}.$
- $\displaystyle\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{\text{n-m+1 fois}} = (n-m+\boxed{1})\alpha$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \alpha = \alpha^{n-m+\boxed{1}}.$

Exemples 2 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$.
- $\displaystyle\sum_{p=2}^{2n} \sqrt{p} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}$,

  mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{2p} = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \ldots + \sqrt{2n-2} + \sqrt{2n}$.
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{\text{n-m+1 fois}} = (n - m + \boxed{1})\alpha$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \alpha = \alpha^{n-m+\boxed{1}}$.
- Un petit dernier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k} = \mathrm{e}^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}$.

ATTENTION

Ne pas confondre :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + 1$. Les parenthèses font toute la différence.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2^k}$, somme de n termes avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} 2^k$, somme de 2^n termes.

Exercice 1 :

Calculer les sommes et produits suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}(k+2)$.
2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}(j^2-2)$.
3. $\displaystyle\prod_{i=3}^{7}\frac{i-1}{i+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1$.
6. $\displaystyle\sum_{p=1}^{2024}(-1)^p$.
7. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}1$.
8. $\displaystyle\prod_{i=6}^{6}i^3$.
9. $\displaystyle\sum_{k=103}^{103}a_k$.

Exercice 2 :

Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole Σ.

1. $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln 10$
2. $1000 + 1010 + 1020 + \cdots + 1540$
3. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}$
4. $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}$
5. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 1001$
6. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1024$
7. $5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 501$
8. $5 - 7 + 9 - 11 + \cdots + 501$

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}},\, k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
  La somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}.$$

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
  La somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}.$$

- Si $\mathrm{G} = \left\{ (i\,;j) \in \mathbb{N}^2 \,/\, i+j=5 \right\} = \{(0\,;5)\,,(1\,;4)\,,(2\,;3)\,,(3\,;2)\,,(4\,;1)\,,(5\,;0)\}$ alors

$$\sum_{(i;j)\in \mathrm{G}} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10} + \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{5}.$$

Exemples 3 (Bis) :

On peut également sommer ou multiplier sur des ensembles :

- On appelle $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
  La somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité *i.e.* la somme et le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ s'écrivent :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}.$$

- Si $\mathrm{G} = \left\{ (i\,;j) \in \mathbb{N}^2 \,/\, i+j=5 \right\} = \{(0\,;5)\,,(1\,;4)\,,(2\,;3)\,,(3\,;2)\,,(4\,;1)\,,(5\,;0)\}$ alors

$$\sum_{(i;j)\in \mathrm{G}} \frac{i}{i+2j} = \frac{0}{10} + \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{5}.$$

- $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{E}} 1 = |\mathrm{E}|$, autant de 1 que d'éléments dans E.

Proposition 1 (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}} a_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i + \sum_{i\in \mathrm{J}} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod^{n}_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}} a_i = \prod_{i\in \mathrm{I}} a_i \times \prod_{i\in \mathrm{J}} a_i.$$

En particulier si $m \in [\![1\,;n]\!]$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i.$$

Proposition I (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}} a_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i + \sum_{i\in \mathrm{J}} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}}^{n} a_i = \prod_{i\in \mathrm{I}} a_i \times \prod_{i\in \mathrm{J}} a_i.$$

En particulier si $m \in [\![1\,;n]\!]$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i.$$

En particulier, pour tout $a \in \mathrm{E}$, $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{I}} a = a \times |\mathrm{I}|$.

Proposition 1 (Relation de Chasles) :

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et I et J deux ensembles finis non vides et **disjoints**.

$$\sum_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}} a_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i + \sum_{i\in \mathrm{J}} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in \mathrm{I}\cup \mathrm{J}}^{n} a_i = \prod_{i\in \mathrm{I}} a_i \times \prod_{i\in \mathrm{J}} a_i.$$

En particulier si $m \in [\![1\,;n]\!]$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i.$$

Elle se généralise aisément à une réunion $\mathrm{I}_1 \sqcup \mathrm{I}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{I}_n$ d'ensembles **deux à deux disjoints** ou à toute partition de I :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}_1\sqcup \mathrm{I}_2\sqcup\ldots\sqcup \mathrm{I}_n} a_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in \mathrm{I}_k} a_i\right).$$

Proposition 2 (Linéarité et multiplicativité) :

Soient I un sous ensemble fini non vide d'entiers, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On note $|I|$ est le nombre d'éléments de I.

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + b_i) = \lambda\left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right). \qquad \text{(Linéarité de la somme)}$$

$$\prod_{i\in I}(\lambda a_i b_i) = \lambda^{|I|}\left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right). \qquad \text{(Multiplicativité du produit)}$$

En particulier, $\displaystyle\prod_{i=p}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^{n-p+1}\prod_{i=p}^{n} a_i$.

ATTENTION

En général et même presque toujours, on n'a pas :

$$\xcancel{\sum_{i=p}^{n}(a_i \times b_i) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=p}^{n}(b_i)\right)}$$

et

$$\xcancel{\prod_{i=p}^{n}(a_i + b_i) = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right) + \left(\prod_{i=p}^{n}(b_i)\right)}.$$

La multiplication n'est pas linéaire mais distributive sur l'addition.

ATTENTION

Inégalité triangulaire : $\left|\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i\right| = \prod_{i\in \mathrm{I}} |a_i|$ mais $\left|\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in \mathrm{I}} |a_i|$.

ATTENTION

Si l'union $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ n'est pas nécessairement disjointe, on retrouve, comme pour les cardinaux, probabilités et autres statistiques :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = \sum_{i\in \mathrm{I}_1} a_i + \sum_{i\in \mathrm{I}_2} a_i - \sum_{i\in \mathrm{I}_1\cap \mathrm{I}_2} a_i.$$

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle n**, noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle factorielle n, noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$

Définition 2 (Factorielle) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle n**, noté $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemple 4 :

- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$

ATTENTION

Ne pas confondre avec $\prod_{k=1}^{n} n = n^n$.

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Remarque : C'est cette propriété qui justifie la convention $0! = 1$.

ATTENTION

La factorielle a priorité sur toutes les opérations.

Ainsi, $n + 1! \neq (n+1)!$, $\quad (2n)! \neq 2n!$ $\quad$ et $n!^2 = (n!)^2 \neq (n^2)!$.

Exercice 3 :

Simplifier :

1. $\dfrac{8!}{6!}$
2. $\dfrac{11!}{9!2!}$
3. $\dfrac{13! - 12!}{12!}$
4. $\dfrac{4}{12!} - \dfrac{4}{11!} + \dfrac{4}{10!}$

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) = u_{n+1} - u_m.} \tag{1}$$

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.} \tag{1}$$

Ce principe s'applique également aux produits de la forme $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}}.$$

Exercice 4 :

Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$.

II. Méthodes de calculs de sommes et de produits

2. Changement d'indice

Il arrive qu'on ait besoin de réindexer une somme (changer l'indice).

Les trois remarques simples suivantes amènent à des techniques pour simplifier des sommes :

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

Exemple 5 :

Si on considère $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{100} a_{k-1}$, on a $\mathrm{S} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{98} + a_{99}$.

On constate qu'on peut aussi noter $\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{99} a_i$, et on a :

$$\sum_{k=1}^{100} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{99} a_i.$$

Méthode 1 :

Dans la pratique, pour effectuer un changement d'indice :

1. On définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
2. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice.
3. On modifie les bornes de la somme en fonction du nouvel indice.

On prendra garde aussi à ni ajouter ni oublier des termes de l'expression par ce nouvel indiçage.

Exercice 5 :

Écrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole Σ puis proposer une autre écriture, avec le symbole Σ. *On ne demande pas de calculer ces sommes !*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-2} \ln(k+2)$
3. $\displaystyle\sum_{k=5}^{3n} \ln(k-1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln n$

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

2. Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

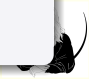
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

2. Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

Exercice 6 :

À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k.$$



1. Sommer pour des indices k de 1 à n revient à somme pour des indices $j+1$ avec j de 0 à $n-1$:
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

2. Sommer les termes par ordre décroissant ou croissant donne le même résultat :
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}.$$

3. Regrouper une somme finie selon les indices de même parité donne le même résultat :
$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n} = (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) \quad + \quad (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$$
$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{2k}\right) \quad + \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}\right).$$

Remarque : (Hors-Programme)

De manière un peu plus formelle, une numérotation des éléments d'un ensemble I consiste en une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathrm{I}$.

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

L'indexation ensembliste n'est qu'une commodité permettant parfois d'avoir à expliciter une bijection.

Soient I et J deux ensembles et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection. Alors, pour toute famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on a :

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} a_j = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_{\varphi(i)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{j\in\mathrm{J}} a_j = \prod_{i\in\mathrm{I}} a_{\varphi(i)}.$$

En appliquant ce résultat à la bijection réciproque φ^{-1}, on a alors aussi, pour toute famille $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$:

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{j\in\mathrm{J}} a_{\varphi^{-1}(j)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\mathrm{I}} a_i = \prod_{j\in\mathrm{J}} a_{\varphi^{-1}(j)}.$$

Le cas le plus fréquent est celui où la bijection est donnée par une translation ou une symétrie sur des ensembles d'entiers consécutifs :

Proposition 4 (Changements d'indice) :

Soit $(a_i)_{m\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de E et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

Translation d'indice : en posant $j = i + \ell$ ou $i = j - \ell$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Inversion de compteur : en posant $j = n + m - i$,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_{n+m-j}.$$

Décomposition indice pairs/impairs : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$

Exemple 6 :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n+1}k^2.$$

Exercice 7 :

Calculer grâce à un changement d'indice :

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{95}\frac{1}{6^k}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1515}^{2013} i$
3. $\displaystyle\sum_{j=-2}^{40}(6j+4)$
4. $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} p$

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $\mathrm{S}_1(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $\mathrm{S}_1(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $\mathrm{S}_2(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

Théorème 5 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $\mathrm{S}_1(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $\mathrm{S}_2(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $\mathrm{S}_3(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

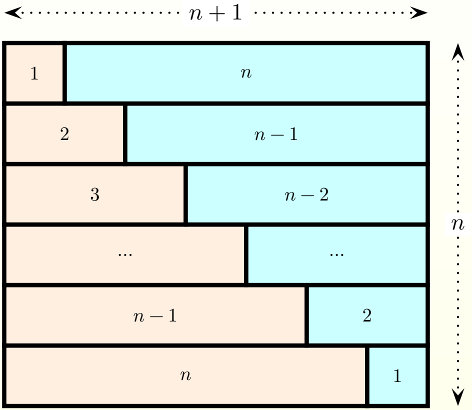


Figure 1 – $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

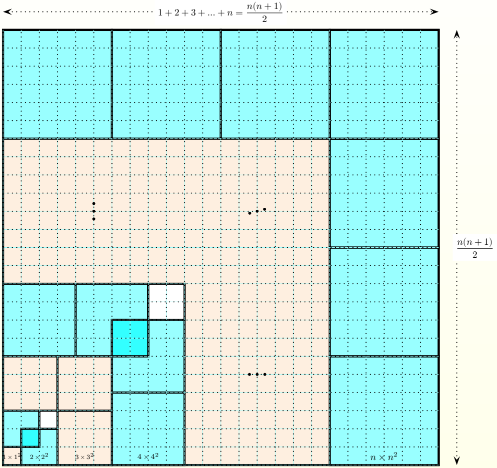


Figure 2 – $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \overbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}. \qquad \text{(S.A)}$$

Théorème 6 (Somme d'une progression arithmétique ou géométrique) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \overbrace{\frac{u_m+u_n}{2}}^{\text{Moyenne des extrêmes}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}. \tag{S.A}$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}, & \text{si} \quad q=1. \\ \underbrace{u_m}_{\text{Premier terme}} \times \dfrac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1-q}, & \text{si} \quad q\neq 1. \end{cases} \tag{S.G}$$

Exemple 7 :

À l'aide de (S.A), on généralise très facilement $\sum_{k=1}^{n} k$ pour $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$

Exemple 8 :

Si $\theta \neq 0$, $1 + \mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{2\theta} + \ldots + \mathrm{e}^{n\theta} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\theta}} = \dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\mathrm{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{\frac{n\theta}{2}}$.

Exemple 9 :

À l'aide de (S.G), on obtient en particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right).$$

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

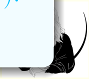
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k}b^k \\ &= (a+b)\left(a^{2p} - a^{2p-1}b + a^{2p-2}b^2 + \ldots - ab^{2p-1} + b^{2p}\right). \end{aligned}$$



Théorème 7 (1 est racine de $X^n - 1$) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux éléments d'un ensemble E commutatif.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exemple 10 :

On peut donc factoriser les **sommes** de puissances **impaires** dans $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \qquad x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) \qquad x^5 + 1 = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Remarque : Si P est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe Q fonction polynomiale de degré $n-1$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{P}(z) - \mathrm{P}(\lambda) = (z-\lambda)\mathrm{Q}(z).$$

On peut aller plus loin :

Corollaire 0.1 (Racine et factorisation) :

Soient P une fonction polynomiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ *i.e.* λ est une racine de P.
2. Il existe une fonction polynomiale Q telle que $\mathrm{P}(z) = (z-\lambda)\mathrm{Q}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 8 :

Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on a alors :

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k) \quad \text{et} \quad \exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{a_k}.$$

Remarque : Pour la deuxième formule, il est inutile de supposer les a_i non nuls ou positifs.

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

Définition 3 (Coefficients binomiaux) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On appelle (coefficient binomial) k parmi n, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Considérer $k \in \mathbb{Z}$ n'amène pas à se demander ce que pourrait signifier $k!$ avec k négatif mais est une convention voulu par le programme afin d'éviter des disjonctions de cas inconséquentes.

Exemples II :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Pour $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et pour $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : Pour les calculs des $\binom{n}{k}$, on utilisera souvent la forme « simplifiée » :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.}$$

On peut noter que le numérateur et le dénominateur comptent autant de facteurs.

Exercice 8 :

Simplifier $\dfrac{\dbinom{n+1}{n}}{\dbinom{n}{1}}$ et $\dfrac{\dbinom{n}{p}}{\dbinom{n-1}{p+1}}$.

Proposition 9 :

Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proposition 9 :

Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.

Proposition 9 :

Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** $\boxed{\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}.}$

Proposition 9 :

Soit $(k\,;n) \in \mathbb{N}^2$

1. **Symétrie :** $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
2. **Formule du capitaine :** Pour $k \neq 0$ et $n \geqslant 1$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.
3. **Formule de Pascal :** $\boxed{\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}.}$
4. **Intégralité :** $\dbinom{n}{k}$ est un entier naturel.

L'assertion (1) de la proposition (9) permet de compléter les premières valeurs de l' exemple (11) :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$
$\vdots$				
n		$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$			$\binom{n+1}{k+1}$	
$\vdots$				

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	**1**	**1**				
2	1	**2**	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	**6**	**4**	1	
5	1	5	10	**10**	5	1

Symétri

Figure 3 – Triangle de Pascal

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif [1] et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{B.N}$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Remarque : Il est parfois plus avantageux d'écrire cette formule en inversant les rôles de a et b sous la forme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1. *i.e.* un anneau dont les DEUX lois $+$ et $\times$ sont commutatives. Surtout le produit !

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{B.N}$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

ATTENTION

Il est très important que l'ensemble contenant a et b soit commutatif pour la loi multiplicative sinon cette formule est fausse. Ceux parmi vous qui ont suivi l'option mathématiques expertes l'année dernière devraient s'en souvenir.

Théorème 10 (Formule du binôme de Newton) :

Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif et n un entier naturel.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}. \qquad \text{(B.N)}\\ &= a^n + na^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Développer :

1. $(x-y)^3$
2. $(1+x\sqrt{2})^4$
3. $(2-x)^5$

Exemples 12 :

- $$\begin{aligned}(a-b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k\, b^{n-k} \\ &= a^n - na^{n-1}b + \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.\end{aligned}$$

Exemples 12 :

- $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k\, b^{n-k}$$
  $$= a^n - na^{n-1}b + \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$$
- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exemples 12 :

- $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k\, b^{n-k}$$
  $$= a^n - na^{n-1}b + \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} n a b^{n-1} + (-1)^n b^n.$$
- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Pour $a = -b = 1$, on obtient $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exemples 12 :

- $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$$
$$= a^n - na^{n-1}b + \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n.$$
- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Pour $a = -b = 1$, on obtient $0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
- Si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \underset{\text{Formule du capitaine}}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \underset{\text{On factorise}}{=} n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$.
$$\underset{k\leftarrow k-1}{=} n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \underset{(1+1)^{n-1}}{=} n \times 2^{n-1}$$

Exemple 13 :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k.$$

Exemple 14 (Application au calcul des sommes de puissances d'entiers) :

En reprenant les notations du théorème (5),

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n(p) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

On peut calculer les $\mathrm{S}_n(p)$ de proche en proche à l'aide de la formule du binôme (B.N) et en considérant la somme :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} \Big((1+k)^{p+1} - k^{p+1} \Big).$$

La somme S peut alors être calculée de deux façons :

- D'une part, comme somme télescopique : $\mathrm{S} = (1+k)^{n+1} - 0^{n+1} = (1+k)^{n+1}$.
- D'autre part, à l'aide de la formule du binôme (B.N), ce qui fait disparaitre les termes d'exposant $p+1$.

On isole ensuite les termes d'exposant p pour reconnaître les expressions cherchées de $\mathrm{S}_n(p)$.

IV. Sommes doubles

IV. Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées sur un produit cartésien (ou au moins un sous-ensemble). Soit R[1] un sous-ensemble de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ et $\left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in\mathrm{R}}$ une famille doublement indexée *i.e.* indexée sur un produit cartésien.

Le but est d'étudier la somme $\displaystyle\sum_{(i;j)\in\mathrm{R}} a_{i,j}$ en se ramenant à des sommes portant sur un seul des deux indices. On parle alors de « coupe » de l'ensemble R.

1. R comme rectangle.

IV. Sommes doubles

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) :

Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E.

On note :

- $\displaystyle\sum_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.
- $\displaystyle\prod_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{ij}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

Définition 4 (Somme sur un rectangle et sur un triangle) :

Soient I et J deux ensembles finis non vides d'entiers, et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E.

On note :

- $\displaystyle\sum_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{ij}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.
- $\displaystyle\prod_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{ij}$ le produit des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

Si la famille est indexée par des couples $(i\,;j)$ vérifiant une condition du type $i \leqslant j$, $i < j$, $i \geqslant j$, ou $i > j$, on dit que la somme ou le produit est triangulaire, et on note :

- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\sum_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\\ i< j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$
- $\displaystyle\prod_{\substack{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}\\ i\leqslant j}} a_{i,j}$

IV. Sommes doubles

Notations : Lorsque $\mathrm{I} = [\![m\,;n]\!]$ et $\mathrm{J} = [\![p\,;q]\!]$, la somme de la famille $\left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ se note :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{m\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} \ \text{ si } \mathrm{I} = \mathrm{J} = [\![m\,;n]\!].$$

ATTENTION

Dans la dernière écriture, l'expression $m \leqslant i, j \leqslant n$ n'est permise que si i et j sont deux variables indépendantes.

IV. Sommes doubles

Exemples 15 :

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{57}{60}$
- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{19}{20}$
- $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{360}$
- $\displaystyle\prod_{0\leqslant i<j\leqslant 2} \frac{1}{i+2j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Théorème 11 (Somme double indexée par un rectangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!]\times[\![p\,;q]\!]$.

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Théorème 11 (Somme double indexée par un rectangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le rectangle $[\![m\,;n]\!]\times[\![p\,;q]\!]$.

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}.$$

Dans le cas d'un rectangle, les sommes permutent donc sans contraintes.

Preuve :

$i \backslash j$	p	$p+1$	...	q	Total
m	$a_{m\,p}$	$a_{m\,p+1}$	...	$a_{m\ \ q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m\,j}$
$m+1$	$a_{m+1\,p}$	$a_{m+1\,p+1}$	...	$a_{m+1\ \ q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m+1\,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{n\,p}$	$a_{n\,p+1}$	...	$a_{n\ \ q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{n\,j}$
Total	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,p}$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,p+1}$	...	$\sum_{i=m}^{n} a_{i\,q}$	$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ $\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$

Théorème 12 (Somme double indexée par un triangle) :

Soient m, n, p, q des entiers et $\left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par le triangle $\left\{ (i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n \right\}$.

$$\sum_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}.$$

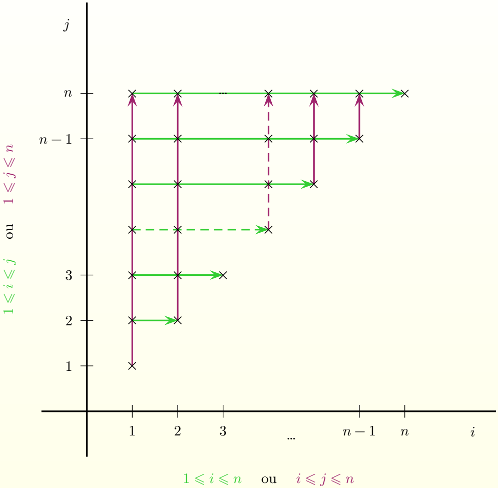


Figure 4 – Sommation par tranches

Preuve :

$i \backslash j$	m	$m+1$	$\cdots$	n	Total
m	$a_{m\,m}$	$a_{m\,m+1}$	$\cdots$	$a_{m\,n}$	$\displaystyle\sum_{j=m}^{n} a_{m\,j}$
$m+1$		$a_{m+1\,m+1}$	$\cdots$	$a_{m+1\,n}$	$\displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1\,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				$a_{n\,n}$	$\displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n\,j}$
Total	$\displaystyle\sum_{i=m}^{m} a_{i\,m}$	$\displaystyle\sum_{i=m}^{m+1} a_{i\,m+1}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{i\,n}$	$\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ $\displaystyle\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{ij}$

IV. Sommes doubles

1. Permutation des sommes

Si l'on somme sans prendre la diagonale *i.e.* les termes a_{ii}, $i \in [\![1\,;n]\!]$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{m\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=m}^{j-1} a_{ij}.}$$

Exercice 10 :

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

Proposition 13 (Produit de deux sommes) :

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ deux familles d'éléments de E.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j.$
- $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} a_i a_j.$ (Carrée d'une somme)

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes.

Exemple 16 :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Les résultats précédents du théorème (11) et du théorème (12) s'étendent de façon immédiate si on remplace « somme double » par « produit double » :

Théorème 14 :

Soit $(a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de E indexée par un rectangle $[\![m\,;n]\!] \times [\![p\,;q]\!]$ ou un triangle $\{\,(i\,;j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J} \,/\, m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

On a :

Sur un rectangle : $\displaystyle\prod_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} a_{ij} = \prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} a_{ij}.$

Sur un triangle : $\displaystyle\prod_{m\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=i}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m}^{n}\prod_{i=m}^{j} a_{ij}.$

(sans la diagonale) $\displaystyle\prod_{m\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=m}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=m+1}^{n}\prod_{i=m}^{j-1} a_{ij}.$

Exemple 17 :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2) &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\prod_{j=1}^{n}j^2\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\left(\prod_{j=1}^{n}j\right)^2\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n n!^2\right) \\
&= (n!)^{2n}\times\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^n = (n!)^{2n}\times(n!)^n = (n!)^{3n}.
\end{aligned}$$

Exercice 11 :

Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} z_{ij}$?