Fichiers Trigonometrie a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Calculer les valeurs exactes de :

1. $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right)$.
2. $\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{37\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 : Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 3 : Linéariser les polynômes trigonométriques suivants $1+\cos^2(x)$, $\cos^3(x)+2\sin^2(x)$.

Exercice 4 : Simplifier, suivant la valeur de $x \in [-\pi, \pi]$, l'expression $\sqrt{1+\cos(x)} + \left|\frac{\sin(x)}{2}\right|$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$,
2. $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
3. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$,

Correction :

1. $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
3. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ si, et seulement si $x = \pi/6 + k\pi/2$ ou $x = \pi/18 + k\pi/3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
2. $\tan(x) = -1$,
3. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$,

Correction :

1. $\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
2. $\tan(x) = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ si, et seulement si $x = 5\pi/14 + 6k\pi/7$ ou $x = \pi/2 + 6k\pi/5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
2. $\cos(3x) = \sin(x)$.

Correction :

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
2. $\cos(3x) = \sin(x)$ si, et seulement si $x = \pi/8 + k\pi/2$ ou $x = -\pi/4 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.

Correction :

1. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

   De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

2. $$12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2(x) - 4(1 - \cos^2(x)) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
   $$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$.

Correction : $\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$ si, et seulement si $2\cos(4x)\cos(x) \leqslant \cos(x)$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$.

Correction : $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$ si, et seulement si $\cos(x) > \dfrac{1}{2}$ si, et seulement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\,; \dfrac{\pi}{/}6 + 2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 : À quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ?

Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

Correction : L'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ a des solutions ssi $m \in [-2, 2]$ et pour $m = \sqrt{2}$, les solutions sont $x = \pi/12 + 2k\pi$ ou $x = -5\pi/12 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.
2. À l'aide une méthode similaire, résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

Exercice 13 : Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) > \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$,
2. $\cos^2(x) \geqslant \cos(2x)$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$.

Correction :

1. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) > \cos\left(\frac{x}{2}\right) &\iff 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 > 0 \iff \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) > 0 \\
&\iff 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 < 0 \text{ et } \cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1 \\
&\iff \cos\left(\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2} \text{ et } \left(\frac{x}{2}\right) \notin 2\pi\mathbb{Z} \\
&\iff \left(\frac{x}{2}\right) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \\
&\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \iff x \in \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]
\end{aligned}$$

2. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2(x) \geqslant \cos(2x) \iff \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geqslant \cos(2x) \iff \cos(2x) \leqslant 1 \iff x \in [-\pi, \pi]$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\times\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

De même, puisque $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\times\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)}$ et

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Exercice 2 : Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 3 : À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, calculer $\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 4 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,
2. $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = 0$,

Correction :

1. $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x,

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \sin x - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{ix} + e^{i\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}(j^2+1+j)\right) = 0.$$

Exercice 5 : Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2}{\cos(2x)}$,
2. $\frac{1}{\tan(x)}-\tan(x)=\frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction :

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

   Donc, pour $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}+\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\ \text{(pour } x \text{ vérifiant de plus } x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&=\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}+\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}\\&=\frac{(\cos(x)-\sin(x))^2+(\cos(x)+\sin(x))^2}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{2(\cos^2x+\sin^2x)}{\cos(2x)}\\&=\frac{2}{\cos(2x)}\ \text{(ce qui reste vrai pour } x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

2. Pour $x\notin\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan(x)}-\tan(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin(x)\cos x}=\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{2}{\tan(2x)}.$$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0$, $\mathrm{I}=[0,2\pi]$,
2. $\cos(nx)=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Correction :

1. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0\Leftrightarrow(2\cos(x)-1)(\cos(x)-1)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}$ ou $\cos(x)=1$.

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup2\pi\mathbb{Z}$$

   De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$.
2. $\cos(nx)=0\Leftrightarrow nx\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0$, $\mathrm{I}=[0,2\pi]$,
2. $\cos(nx)=0$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Correction :

1. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0\Leftrightarrow(2\cos(x)-1)(\cos(x)-1)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}$ ou $\cos(x)=1$.

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup2\pi\mathbb{Z}$$

   De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$.
2. $\cos(nx)=0\Leftrightarrow nx\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1 $|\sin(nx)| = 1$,

2 $\sin(x) = \tan(x)$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$.

Correction :

1 $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

2 $\sin(x) = \tan(x) \Leftrightarrow \sin(x) - \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \sin(x)\dfrac{\cos(x)-1}{\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.

De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.

Correction : $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$ si, et seulement si $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/10 + 2k\pi/5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

Correction : $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ si, et seulement si $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 : À quelle condition sur le réel m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$ a-t-elle une solution réelle ?

Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

Correction : L'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ a des solutions ssi $m \in [-2, 2]$ et pour $m = \sqrt{2}$, les solutions sont $x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 : Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1 $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{I} = [-\pi, \pi]$,

2 $\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$.

Correction :

1 Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \iff x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

2 Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\frac{x}{3}\right) &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x}{3}\right) \geqslant 0 \\
&\iff \sin\left(\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leqslant \left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\pi}{4} \leqslant \pi + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \iff \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi
\end{aligned}$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(nx)$ en fonction de $\tan(x)$.

Correction : $\tan(nx) = \dfrac{(n\,;1)\tan(x) - \dbinom{n}{3}\tan^3(x) + \cdots}{\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{2}\tan^2(x) + \cdots}$.

Exercice 2 :

1. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0,\pi[$ (penser à $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$).

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

Correction :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\dfrac{a}{2^k}\neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\dfrac{a}{2^{k-1}}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{a}{2^k}\right)=2\sin\left(\dfrac{a}{2^k}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\frac{\sin(a)}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$

$$\forall\, a\in]0,\pi[,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$

2. $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)>0$ car $\dfrac{a}{2^k}$ est dans $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Puis

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)=\ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right).$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(\frac{\sin a}{a})-\ln(\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\left(\frac{a}{2^n}\right)})\right)=\ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right).$$

$$\forall\, a\in]0,\pi[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right).$$

Exercice 3 : Montrer que $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)=\dfrac{3}{2}$.

Correction :

$$\begin{aligned}\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)&=2(\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right))=2(\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right))\\&=2\left(\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2-2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Exercice 4 : Combien l'équation $\tan(x)+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)=0$, possède-t-elle de solutions dans $[0,\pi]$?

Correction : Pour $x\in[0,\pi]$, posons $f(x)=\tan(x)+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)$.

$$\begin{aligned}f(x)\text{ existe}&\Leftrightarrow\tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x)\text{ et }\tan(4x)\text{ existent}\\&\Leftrightarrow(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (2x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (3x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\text{ et }(4x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow(x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}),\ (x\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z})\text{ et }(x\notin\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z})\\&\Leftrightarrow x\notin\left\{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right\}.\end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0,\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0,\pi]$. Sur $\mathrm{I}=\left[0,\frac{\pi}{8}\right[$ ou $\mathrm{I}=\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right]$, puisque $f(0)=f(\pi)=0$, (E) a exactement une solution dans I.

Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty,+\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Ceci porte le total à $6+2=8$ solutions.

En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan(x)$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty,+\infty[$. Finalement,

$$\boxed{\text{(E) admet exactement dix solutions dans } [0,\pi].}$$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2(x)+1}+16.2^{4\sin^2(x)-3}=20$.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2(x)+1}+16.2^{4\sin^2(x)-3}=20 &\iff 2^{4\cos^2(x)+1}+16.2^{1-4\cos^2(x)}=20 \iff 2^{4\cos^2(x)}-10+16\times 2^{-4\cos^2(x)}=0\\
&\iff 2^{4\cos^2(x)}-10+\frac{16}{2^{4\cos^2(x)}}=0 \iff (2^{4\cos^2(x)})^2-10\times 2^{4\cos^2(x)}+16=0\\
&\iff 2^{4\cos^2(x)}=2 \text{ ou } 2^{4\cos^2(x)}=8 \iff 4\cos^2(x)=1 \text{ ou } 4\cos^2(x)=3\\
&\iff \cos(x)=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x)=-\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 6 : Soit (E) : $\sin(2x)-\sin(3x)=0$.

1. Résoudre (E).
2. Transformer (E) sous la forme $\mathrm{P}(\cos(x))\sin(x)=0$, où P est une fonction polynomiale.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 7 : Résoudre $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$.