Fichiers Recurrence a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Montrer $\forall\, n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$.

Exercice 2 : Montrer $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 : On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n(n-1)$.

Exercice 6 : Soit $s_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = s_n + 3n(n+1)$.
Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un multiple de 6.

Exercice 7 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Montrer $\forall\, n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.
Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Exercice 4 : Soit $q \in \mathbb{R}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5 : Montrer pour tous $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$: ; $1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$.

Exercice 6 : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 7 : Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 8 : On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

Exercice 9 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même possède un point fixe *i.e.* $\exists\, k \in [\![1, n]\!], \quad f(k) = k$.

Exercice 2 : Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 3 : On remarque que $(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$, et $(1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2}$. Le but est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tel que

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Établir alors que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ et en déduire le résultat attendu.

Exercice 4 : Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 5 :

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un "vrai" triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Exercice 7 : On considère une suite d'ensembles $\left(\mathrm{A}_j\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$.

1 Montrer par récurrence la première formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$

2 En déduire, sans récurrence, la deuxième formule de Morgan généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \overline{\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_k}.$$