Fichiers Nombres-Complexes-II-Trigonometrie a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Correction : Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Montrer que $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Correction : Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm ... \pm a_n)}$. ◦ $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$
◦ Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 ... \cos a_n$ alors

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm ... \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm ... \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm ... \pm a_n)}\\ &= 2\cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 ... \cos a_{n+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = 2^n \cos a_1 ... \cos a_n$.

Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm ... \pm a_n) = \mathrm{Re}\,(S_n) = 2^n \cos a_1 ... \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm ... \pm a_n) = \mathrm{Im}\,(()\, S_n$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum \cos(\pm a_1 \pm ... \pm a_n) = 2^n \cos a_1 ... \cos a_n.}$$

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kb)$.

Correction : $\displaystyle\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$. En déduire que $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Correction :

$$\begin{aligned}\sin 5x &= 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\alpha = \sin\frac{\pi}{5}$, $5\alpha - 20\alpha^3 + 16\alpha^5 = \sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Comme $\alpha \neq 0$, on a $5 - 20\alpha^2 + 16\alpha^4 = 0$ et donc $5 - 20\mathrm{A} + 16\mathrm{A}^2 = 0$ en posant $\mathrm{A} = \alpha^2$.

$\Delta' = 10^2 - 5\times 16 = 20$. D'où $\mathrm{A} = \frac{10-\sqrt{20}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $\mathrm{A} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

Or $0 < \sin\frac{\pi}{5} < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 < \sin^2\frac{\pi}{5} < \frac{1}{2}$. Et comme $\frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{7}{8}$, on a nécessairement, $\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et donc comme $0 < \sin\frac{\pi}{5}$, $\boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$.

Exercice 2 : Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$, ($x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ donnés).

Correction : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $\mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$\mathrm{S}_n + \mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

et

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

Si $x\in\pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx) = 0,$$

et si $x\notin\pi\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{S}_n + \mathrm{S}'_n = n+1 \text{ et } \mathrm{S}_n - \mathrm{S}'_n = \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } \mathrm{S}'_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

Exercice 3 : Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin((k+1)\theta)$.

Correction : $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \sin\frac{(n+2)\theta}{2}$.

Exercice 4 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-3)^k$.

Correction : $2^n \cos(n\pi/3)$.

Exercice 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\right\}$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x) = \text{Re}\left(e^{3ix}\right) = \text{Re}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3 - 2\sin x) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x(-4\sin^2 x - 2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10} = -\sin\frac{3\pi}{10}$)

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Puis

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

et de même

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Exercice 6 : Soit a un réel distinct de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Correction :

1. Tout d'abord, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) = (\cos\theta+i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta} = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\,\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow (3x-x^3)(1-3a^2) = (1-3x^2)(3a-a^3)\ \left(\text{car } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation}\right)\\ &\Leftrightarrow (x-a)((3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3) = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta' = 16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3) = 3a^4+6a^2+3 = (\sqrt{3}(a^2+1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{a, \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}, \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a=\tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x=\tan\theta$ (à savoir $\alpha=\arctan a$ et $\theta=\arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta)=\tan(3\alpha)\\ &\Leftrightarrow 3\theta\in 3\alpha+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta\in\alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x=\tan\alpha=a$, puis

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Exercice 7 : Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geqslant\frac{n}{4}$ (remarquer que si $x\in[0;1],\ x^2\leqslant x$).

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k|\in[0,1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\cos k| &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\cos^2 k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos(2k))=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik}\right)=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)\\ &=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1}\right)=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1}{2\sin 1}=0,594\ldots$. Par suite, pour $n\geqslant 3$, $\frac{1}{2\sin 1}\leqslant 0,75=\frac{3}{4}\leqslant\frac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}\geqslant\frac{n}{2}-\frac{n}{4}=\frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n=1$, $|\cos 1|=0.5\ldots\geqslant 0.25=\frac{1}{4}$ et si $n=2$, $|\cos 1|+|\cos 2|=0.9\ldots\geqslant 0.5=\frac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geqslant\frac{n}{4}.}$$

Exercice 8 : On veut calculer $\mathrm{S}=\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan(x)$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9^\circ$, $-\tan 27^\circ$, $-\tan 63^\circ$ et $\tan 81^\circ$ puis la valeur de S.

Correction :

1 Pour $x \notin \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x) = \frac{\operatorname{Im}\left((e^{ix})^5\right)}{\operatorname{Re}\left((e^{ix})^5\right)} = \frac{5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x} = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x) = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}.}$$

2 $9°$, $-27°$, $-63°$ et $81°$ vérifient $\tan(5 \times 9°) = \tan(5 \times (-27°)) = \tan(5 \times (-63°)) = \tan(5 \times 81°) = 1$.
On résout donc l'équation :

$$\tan(5x) = 1 \iff 5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \iff x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $]-90°, 90°[$ sont $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ et $81°$.

Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ et $\tan(81°)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X - 10X^3 + X^5}{1 - 10X^2 + 5X^4} = 1$ qui s'écrit encore :

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = 0.$$

Le polynôme $X^5 - 5x^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1$ admet déjà $\tan(45°) = 1$ pour racine et on a

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = (X - 1)(X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ et $\tan(81°)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1$.

Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X - \tan(9°))(X + \tan(27°))(X + \tan(63°))(X - \tan(81°))$.

L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9°) - \tan(27°) - \tan(63°) + \tan(81°)$ et on a montré que :

$$\boxed{\tan(9°) - \tan(27°) - \tan(63°) + \tan(81°) = 4.}$$