Fichiers Nombres-Complexes-II-Geometrie a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

1. $|z-i| = |z+2|$
2. $\dfrac{|z+i|}{|z|} = \sqrt{2}$
3. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Exercice 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

1. $|z+i-1| \leqslant 2$
2. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\arg(\mathrm{z}) = \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $|(1-i)z+i| = 2$.

Correction : $\left|z - \dfrac{1-i}{2}\right| = \sqrt{2}$.

Exercice 4 : Soit ABCD un carré dans le plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que A et B sont à coordonnées entières.

Montrer que C et D le sont aussi.

Correction : $c - a = \pm i(b-a)$...

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0,$$

où a, b et c désignent les affixes respectives de A, B et C et où $j^3 = 1$.

Exercice 2 :

1. Résoudre $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$ sachant qu'il y a une solution réelle.
2. Déterminer la nature du triangle dont les sommets sont les images des solutions.
3. Déterminer l'affixe de son centre de gravité.

Correction : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z+1)(z^2 - 3z + 3 - i)$.

$\Delta = -3 + 4i = (1+2i)^2$.

$\mathrm{A}(-1), \mathrm{B}(2+i), \mathrm{C}(1-i)$. *Le triangle est isocèle rectangle en* B. G $\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Exercice 3 : Déterminer les points d'affixe z tels que les points d'affixe i, z, iz forment un triangle équilatéral.

Correction : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}(1+i)$.

Exercice 4 : Pour tout complexe $z \neq 1$, on pose $\mathrm{Z} = \dfrac{z+2}{z-1}$.

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixes z tels que :

1. $Z \in \mathbb{R}$
2. $Z \in i\mathbb{R}$
3. $|Z| = 1$

Correction : $Z = \dfrac{x^2+y^2+x-2}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$.

1. $Z \in \mathbb{R} \iff y = 0$ et $x \neq 1$. Axe réel privé de privé de $A(1)$.
2. $Z \in i\mathbb{R} \iff x^2+y^2+x-2 = 0$ et $z \neq 1$: cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$ privé de $A(1)$.
3. $|Z| = 1$: médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1)$ et $B(-2)$.

Exercice 5 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que les points d'affixes i, z, iz forment un triangle rectangle isocèle en $A(i)$.

Correction : $iz - i = \pm i(z-i) \iff iz - i = -i(z-i) \iff 2iz - i = 1 + i \iff z = \dfrac{1-i}{2}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soient A, B, C trois points d'un cercle de centre O d'affixes respectives a, b, c.

Montrer que $H(a+b+c)$ est l'orthocentre du triangle ABC.

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}\right) &\equiv \arg \frac{c-b}{c+b} = \arg (c-b)(\bar{c}+\bar{b}) \equiv \arg (c\bar{c} + c\bar{b} - b\bar{c} - b\bar{b}) = \arg (c\bar{b} - b\bar{c}) \\ &\equiv \arg (2i\mathrm{Im}\,(c\bar{b})) = \frac{\pi}{2}\ [\pi].\end{aligned}$$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes j, z, jz soient alignés.

Correction : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{j\}$, $\quad \dfrac{jz-z}{z-j} = \dfrac{(jz-z)(\bar{z}-\bar{j})}{(z-j)(\bar{z}-\bar{j})} = \dfrac{j|z|^2 - z - j\bar{z} + 1}{|z-j|^2}$.

$\dfrac{jz-z}{z-j} \in \mathbb{R} \iff j|z|^2 - z - j\bar{z} + 1 \in \mathbb{R} \iff \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2) - y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 0 \iff x^2 + y^2 - y\sqrt{3} - x = 0.$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rayon 1.

Exercice 3 : On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & e^z \end{array}$.

Soit X une partie de $\mathbb{C}$; déterminer et représenter dans le plan complexe X et $f(X)$.

1. $A = \{ib, \quad b \in \mathbb{R}\}$
2. $B_b = \{a + ib, \quad a \in \mathbb{R}\}$, b désignant un réel fixé.
3. $C = \left\{a + ib, \quad (a,b) \in \mathbb{R} \times \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\right\}$.
4. $D = \left\{a + ib, \quad (a,b) \in [0, \ln 2] \times \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\right\}$.