# Fichiers Nombres-Complexes-I a, b et c

## EXERCICES FACILES :

**Exercice 1** : Montrer que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)\right.$.

**Exercice 2** : Montrer que $(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)\right.$.

**Exercice 3** : Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

**Exercice 4** : Calculer $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{32}$.

**Exercice 5** : Calculer $(1+i\sqrt{3})^{2000}$.

**Exercice 6** : Calculer $\left(\sqrt{3}-i\right)^{2009}$.

**Exercice 7** : Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+7\sin\frac{\pi}{12}}{1+7}=\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}$.

**Exercice 8** : Donner le module et l'argument de $\left(\dfrac{1+8-\sqrt{3}(1-8)}{1+8}\right)^2$.

**Exercice 9** : Calculer $(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$.

## EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

**Exercice 1** : Calculer le module et l'argument de $\dfrac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}$ où $\varphi\in\mathbb{R}$.

**Exercice 2** : Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

**Exercice 3** : Déterminer les complexes $z$ tels que $z$, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

**Exercice 4** : On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Montrer que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{U}\setminus\{-1\}\iff \exists x\in\mathbb{R}\,/\,z=\frac{1+ix}{1-ix}.$$

**Exercice 5** : Mettre $\dfrac{1+2j}{1+j^4}$ sous la forme $a+bj$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

**Correction** : $\dfrac{1+2j}{1+j^4}=\dfrac{1+2j}{1+j}=\dfrac{(1+2j)(1+j^2)}{(1+j)(1+j^2)}=\dfrac{1+2j+j^2+2j^3}{1+j+j^2+j^3}=\dfrac{1+2j-(1+j)+2}{0+1}=2+j.$

**Exercice 6** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.

**Exercice 7** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2-2z+1=0$.

**Correction** : L'équation $4z^2-2z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.

**Exercice 8** : Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec $a$, $b$, $c$ réels, sont réelles ou conjuguées.

**Correction** : Si $z$ est une racine de P i.e. $\mathrm{P}(z)=0$, alors

$$\mathrm{P}(\overline{z})=a\overline{z}^2+b\overline{z}+c=\overline{az^2+b^z+c}=\overline{\mathrm{P}(z)}=0.$$

Donc $\overline{z}$ est aussi une racine de P.

Or, $z$ n'est pas un nombre réel (car $\Delta<0$ ) donc $\overline{z}\neq z$.

Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont $z$ et $\overline{z}$ et elles sont conjuguées.

## EXERCICES PLUS ARDUS :

**Exercice 1** : Pour quelles valeurs de l'entier $n$, le complexe $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

**Correction** :

$$\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n=\left(\frac{2^5e^{\frac{-5i\pi}{3}}}{\sqrt{2}^3e^{\frac{-3i\pi}{4}}}\right)^n=\left(\sqrt{2}^7e^{\frac{-11i\pi}{12}}\right)^n=2^{\frac{7n}{2}}e^{-\frac{11ni\pi}{12}}.$$

Donc $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n\in\mathbb{R}_+\iff\exists k\in\mathbb{Z},-\frac{11n\pi}{12}=2k\pi\iff\exists k\in\mathbb{Z},11n=24k.$

D'après le théorème de Gauss, comme 11 et 24 sont premiers entre eux, alors $24|n$ i.e. $n\in 24\mathbb{Z}$. La réciproque est claire.

**Exercice 2** : Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb)$.

**Correction** : $\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a+\frac{n}{2}b\right)$.

**Exercice 3** : Calculer $\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)$.

**Correction** : $\sum_{k=0}^{n}e^{i(a+kb)}=e^{ia}\sum_{k=0}^{n}e^{ikb}=e^{ia}\frac{1-e^{(n+1)ib}}{1-e^{ib}}=e^{ia}\frac{e^{\frac{(n+1)ib}{2}}}{e^{\frac{ib}{2}}}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}e^{i(a+\frac{nb}{2})}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb)=\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)}$$

**Exercice 4** : Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\frac{\pi}{n}=\operatorname{cotan}\frac{\pi}{2n}$.

En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{8}$. Vérifier cette valeur à l'aide de $\tan\frac{\pi}{4}$.

**Correction :**

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\frac{\pi}{n} = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{n}}-1}{e^{4\frac{\pi}{n}}-1}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{-2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(2i\sin\frac{\pi}{2n})}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) = \mathrm{cotan}\,\frac{\pi}{2n}.$$

Par conséquent, $\tan\frac{\pi}{8} = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{3}\sin k\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$

**Exercice 5 :** Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

**Correction :** On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}e^{\frac{ki\pi}{3}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\,\frac{1-\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right)^n}{1-\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}}$.

**Exercice 6 :** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$, ($x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ donnés).

**Correction :** Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\mathrm{S}'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

$$\mathrm{S}_n + i\mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix}=1 \Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

**1er cas.** Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $\mathrm{S}_n = n+1$ et $\mathrm{S}'_n = 0$.

**2ème cas.** Si $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{S}_n + i\mathrm{S}'_n = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\,\frac{e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2}+e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}$$
$$= e^{inx/2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases}\dfrac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1 \text{ si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases} \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 \text{ si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

**Exercice 7 :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$, ($x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ donnés).

**Correction :** Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos(kx)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\sin(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(e^{ix})^k 1^{n-k}$$
$$= (1+e^{ix})^n = (e^{ix/2}+e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

$$\frac{n\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{n\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

$$\frac{3\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{4\sin(\theta/2)} - \frac{\sin\left(3n\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(3(n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{4\sin(3\theta/2)}.$$

**Exercice 8** : Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{1}{i+\tan\theta}$ pour $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Correction** : $z = \dfrac{1}{i+\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{i\cos\theta + \sin\theta} = (\sin\theta - i\cos\theta)\cos\theta = -ie^{i\theta}\cos\theta = \cos\theta e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$.