Fichiers Fonctions-Reference-Reciproque a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 :

1. Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
2. Retrouver le résultat de la question précédente et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 2 :

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Correction :

1. $\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$.
2. $f^{-1} : y \mapsto \ln \dfrac{y}{y - 1}$.

Exercice 3 :

Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 :

1. Étudier $f : x \mapsto \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.
2. Montrer que f est bijective. Calculer f^{-1}.
3. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

Correction :

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ et $f^{-1}(b) = \dfrac{\operatorname{sh} b}{2}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{array}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la corestriction ϕ de f à $f(\mathbb{R})$ est bijective.
3. Déterminer sa bijection réciproque ϕ^{-1}.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble I à déterminer.
2. Donner pour $y \in$ I une expression de $f^{-1}(y)$, analogue à celle de f.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x + e^x \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et donner $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1}, déterminer le plus grand intervalle $\mathrm{K} \subset \mathrm{J}$ sur lequel f^{-1} est dérivable. Déterminer alors $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in \mathrm{K}$.

Correction : $\forall x \in]1, +\infty[, \quad (f^{-1})'(x) = -\dfrac{\sin^2(f^{-1}(x))}{\cos(f^{-1}(x))}$.

Or $f \circ f^{-1}(x) = x$ d'où $\dfrac{1}{\sin(f^{-1}(x))} = x$.

De plus, $\cos(f^{-1}(x)) < 0$ donc $\cos(f^{-1}(x)) = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}.$$