Fichiers Fonctions-Hyperboliques a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Montrer que $\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$, $\operatorname{th}(x) = \sin(y)$, et $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1}{\cos(y)}$.

Exercice 2 : Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}, \arcsin(\operatorname{th}(t)) = 2\arctan(\mathrm{e}^t) - \frac{\pi}{2}$.

Correction : La dérivée des expressions de gauche et de droite est $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, t \geqslant 0$, $\arctan(\operatorname{sh}(t)) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}\right)$.

Exercice 4 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x)$.

Correction : Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}\right)$.

Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$.

Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \dfrac{1}{8}e^{-x}(6e^x+2e^{-3x}) = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\dfrac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch} x))$.

Correction :
$$\begin{aligned} x-\ln(\operatorname{ch} x) &= x-\ln\Big(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Big) = x-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2 \\ &= x-\ln(e^x(1+e^{-2x}))+\ln 2 = x-x+\ln(1+e^{-2x})+\ln 2 \\ &= \ln(1+e^{-2x})+\ln 2 \end{aligned}$$

Lorsque $x\to+\infty$, $\ln(1+e^{-2x})\to 0$ donc $x-\ln(\operatorname{ch} x)\to\ln 2$.

Exercice 6 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
2. $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction :

1. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \mathrm{Max}\{x,-x\}.$$
Donc, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ et $\sqrt{x^2+1}-x>0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,
$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0.$$
2. Pour $x>0$,
$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\text{ch}\,(x) = 2$.

Correction : $\text{ch}\,(x) = 2 \Leftrightarrow x = \pm\text{argch}\,(2) = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$.
Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5\text{ch}\,(x) - 3\text{sh}\,(x) = 4$.

Correction : $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3\text{sh}\,(x) - \text{ch}\,(x) = 1$.

Correction : $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{1}{\text{ch}(x)} \end{array}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.
3. Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}^+$définit une bijection de $\mathbb{R}^+$sur un intervalle J à déterminer.
4. Déterminer g^{-1}.

Exercice 2 : Asymptotes à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(\text{ch}\,x)$?

Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln\dfrac{e^x}{2} + \ln(1+e^{-2x}) = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x})$.

Donc $\Delta : y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Par parité, $\Delta' : y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3 : Construire le graphe de $f_2 : x \longmapsto \ln(\text{ch}\,x)$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{ch}\,x \geqslant 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x) \geqslant 0$. f_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire.

Puisque la fonction $x \mapsto \text{ch}\,x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

f_2 est paire et donc f_2' est impaire. Par suite, $f_2'(0) = 0$ et $\mathcal{C}_2$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f_2(0)) = (0, 0)$.

Étude en $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$,

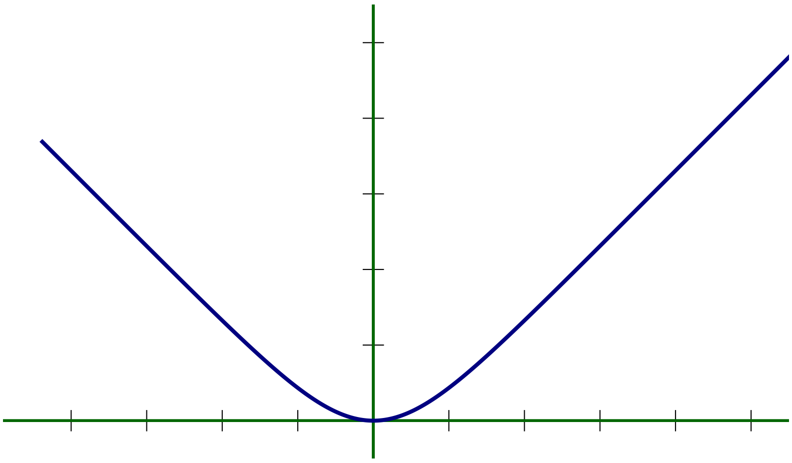
$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1+e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ en $+\infty$.

Par symétrie par rapport à la droite $(\mathrm{O}y)$, la droite (D') d'équation $y=-x-\ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ en $-\infty$.
Enfin, pour tout réel x,

$$f_2(x)-(x-\ln 2)=\ln(1+e^{-2x})>\ln 1=0,$$

et $\mathcal{C}_2$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathcal{C}_2$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$.
On en déduit $\mathcal{C}_2$.



Exercice 4 : Étudier $f:\ x\mapsto \ln(\mathrm{ch}\,x)-x$.

Correction : ◦ Pour tout réel x, $\mathrm{ch}\,x>0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x)=\mathrm{sh}\,x\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}-1=\mathrm{th}\,x-1<0.$$

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
◦ Étude en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{ch}\,x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^{-x})-x-\ln 2+\ln(1+e^{2x})=-2x-\ln 2+\ln(1+e^{2x}).$$

Donc, $f(x)-(-2x-\ln 2)=\ln(1+e^{2x})$. Or, d'une part $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{2x})=0$ et donc la droite (D) d'équation $y=-2x-\ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1+e^{2x})>0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

◦ Étude en $+\infty$.

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^{x})-x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})=-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Étudier la fonction $f:x\mapsto \mathrm{th}\,(t)-\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(t)}$.

Exercice 6 : Étude complète $x\longmapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{ch}\,x}{-1+\mathrm{ch}\,x}}\right)$.

Exercice 7 : Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{2^n\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(\text{th}\,(x)) + \arctan(\text{sh}\,(x))$$

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée de f.
3. En déduire une expression simplifiée de f.
4. Résoudre l'équation $\text{th}\,(x) = \dfrac{5}{13}$ puis montrer que

$$\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Correction :

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $f' = 0$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. $\text{th}\,(x) = \dfrac{5}{13}$ admet pour solution $\ln\dfrac{3}{2}$.

   On a $\text{sh}\,(x) = \dfrac{5}{12}$, d'où $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 :

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(\text{ch}\, x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \text{ch}\, x.$$

   Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \text{ch}\, x.$$

   Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Correction :

1. Si f existe alors pour $x = 1$ on a $f(\text{ch}\, 1) = e$ et pour $x = -1$ on a $f(\text{ch} - 1) = f(\text{ch}\, 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \text{ch}\, 1$).
2. Notons $\text{X} = e^x$, l'équation devient

$$f(\text{X}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(\text{X} + \frac{1}{\text{X}}).$$

   Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ alors l'unique façon de définir f sur $]0, +\infty[$ est par la formule $f(t) = \dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t})$.

3. Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t})$ pour $t > 0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t > 0$ et $t \to 0$ est $+\infty$.

Exercice 3 : Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(kx) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Correction : Puisque $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, les expressions $\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kx}$ et $\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$ sont des sommes de termes de suites géométriques, de raison respectivement e^x et e^{-x}.

Si $x = 0$, on a directement $\mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

Supposons $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} e^{kx} = \frac{e^x - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \\
&= e^x \, \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} \\
&= e^x \, \frac{e^{\left(\frac{nx}{2}\right)}\left(e^{-\left(\frac{nx}{2}\right)} - e^{\left(\frac{nx}{2}\right)}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{e^{\left(\frac{nx}{2}\right)} - e^{-\left(\frac{nx}{2}\right)}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

De même $\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$. Ainsi :

$$\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = e^{-\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En utilisant $\mathrm{C}_n = \dfrac{(\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n) + (\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n)}{2}$ et $\mathrm{S}_n = \dfrac{(\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n) - (\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n)}{2}$, on récupère donc

$$\mathrm{C}_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} + e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{2} \, \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{ch}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-(n+1)\frac{x}{2}}}{2} \, \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 4 : Étude complète $x \longmapsto \ln|\operatorname{sh} x - 1|$.

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
2. En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \ldots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Correction :

1. On a vu que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul :
$\dfrac{1 + \operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th}(x)} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th}(x) + \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{th}\,(x) = \frac{2}{\mathrm{th}\,(2x)} - \frac{1}{\mathrm{th}\,(x)}.}$$

2 Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \mathrm{th}\,(2^k x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}\,(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\mathrm{th}\,(2^k x)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\mathrm{th}\,(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\mathrm{th}\,(2^k x)} \\
&= \frac{2^{n+1}}{\mathrm{th}\,(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\mathrm{th}\,x}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\mathrm{th}\,(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Exercice 6 : Simplifier l'expression $\dfrac{2\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}\,(2x)}{x - \ln(\mathrm{ch}\,x) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Correction : Par définition des fonctions ch et sh, on a

$$\begin{aligned}
2\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}\,(2x) &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2} \\
&= 1 + e^{-2x}
\end{aligned}$$

Et en utilisant les deux relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^x) = x$ on calcule :

$$\begin{aligned}
x - \ln(\mathrm{ch}\,x) - \ln 2 &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln 2 \\
&= x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 - \ln 2 \\
&= x - \ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right) \\
&= x - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-2x}) \\
&= x - x - \ln(1 + e^{-2x}) \\
&= -\ln(1 + e^{-2x})
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}\,(2x)}{x - \ln(\mathrm{ch}\,x) - \ln 2} = -\frac{1 + e^{-2x}}{\ln(1 + e^{-2x})}$$

C'est une expression de la forme $-\dfrac{u}{\ln u}$ avec $u = 1 + e^{-2x}$:

- si $x \to +\infty$, alors $u \to 1^+$, $\dfrac{1}{\ln u} \to +\infty$ donc $-\dfrac{u}{\ln u} \to -\infty$;
- si $x \to -\infty$, alors $u \to +\infty$ donc d'après les relations de croissances comparées, $-\dfrac{u}{\ln u} \to -\infty$.

Exercice 7 : Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\,(kx) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}\,(kx).$$

Calculer C_n et S_n.

Correction : Puisque $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x$ et $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}$, les expressions $\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kx}$ et $\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$ sont des sommes de termes de suites géométriques, de raison respectivement e^x et e^{-x}.

Si $x = 0$, on a directement $\mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

Supposons $x \neq 0$, alors $e^x \neq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} e^{kx} = \frac{e^x - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \\
&= e^x \, \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} \\
&= e^x \, \frac{e^{\left(\frac{nx}{2}\right)}\left(e^{-\left(\frac{nx}{2}\right)} - e^{\left(\frac{nx}{2}\right)}\right)}{e^{\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{e^{\left(\frac{nx}{2}\right)} - e^{-\left(\frac{nx}{2}\right)}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \\
&= e^{\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

De même $\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$; c'est donc la même formule que ci-dessus en remplaçant x par $-x$. Ainsi :

$$\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = e^{-\frac{(n+1)x}{2}} \, \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En utilisant $\mathrm{C}_n = \frac{(\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n) + (\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n)}{2}$ et $\mathrm{S}_n = \frac{(\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n) - (\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n)}{2}$, on récupère donc

$$\mathrm{C}_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} + e^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{2} \, \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{ch}\,\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{e^{\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-(n+1)\frac{x}{2}}}{2} \, \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{sh}\,\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{nx}{2}\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 8 : Soient a et b deux réels positifs tels que $a^2 - b^2 = 1$. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{ch}\,(y) = 2a \\ \mathrm{sh}\,(x) + \mathrm{sh}\,(y) = 2b \end{array}\right.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{l} \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{ch}\,(y) = 2a \\ \mathrm{sh}\,(x) + \mathrm{sh}\,(y) = 2b \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = 4a \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 4b \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^x + e^y = 2a + 2b \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 4b \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^x + e^y = 2a + 2b \\ -e^{-x} - e^{-y} = 2b - 2a \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^x + e^y = 2(a + b) \\ \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{e^y} = 2(a - b) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

ce qui donne, en posant $\mathrm{X} = e^x$ et $\mathrm{Y} = e^y$:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}+\mathrm{Y} = 2(a+b) \\ \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{1}{\mathrm{Y}} = 2(a-b) \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}+\mathrm{Y} = 2(a+b) \\ \dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{\mathrm{XY}} = 2(a-b) \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}+\mathrm{Y} = 2(a+b) \\ \dfrac{2(a+b)}{\mathrm{XY}} = 2(a-b) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Or $a \neq b$ puisque par hypothèse, $a^2 - b^2 = 1$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}+\mathrm{Y} = 2(a+b) \\ \mathrm{XY} = \dfrac{a+b}{a-b} \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathrm{X} \text{ et } \mathrm{Y} \text{ sont les solutions de } z^2 - 2(a+b)z + \frac{a+b}{a-b} = 0
\end{aligned}
$$

Remarque : On rappelle que si X, Y vérifient le système $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}+\mathrm{Y} = \mathrm{S} \\ \mathrm{XY} = \mathrm{P} \end{array} \right.$, alors X et Y sont les solutions de l'équation $z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0$.

Or le discriminant du trinôme $z^2 - 2(a+b)z + \dfrac{a+b}{a-b} = 0$ vaut

$$
\Delta = 4(a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} = 4(a+b)\left(a+b-\frac{1}{a-b}\right) = \frac{4(a+b)(a^2-b^2-1)}{a-b} = 0
$$

Il y a donc une racine double qui vaut $\dfrac{2(a+b)}{2}$, ainsi $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = a+b$ et donc :

$$
(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow e^x = e^y = a+b
$$

On vérifie que $a+b \geqslant 0$ (car $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$) et $a+b \neq 0$ (car $a^2-b^2=1$). Conclusion : le système (S) admet une unique solution, donnée par $(x = \ln(a+b), y = \ln(a+b))$.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}\,(2+x) + \mathrm{sh}\,(2+2x) + \ldots + \mathrm{sh}\,(2+100x) = 0$.

Correction : Soit x un réel.

$$
\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{100} \mathrm{sh}\,(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx}\right).
$$

Si $x = 0$ alors directement $\mathrm{S} = 100\mathrm{sh}\,2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$
\mathrm{S} = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).
$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} = 0 & \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2}(1-e^{-100x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x}) + e^{-2-100x}(e^{100x}-1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (1-e^{100x})(e^{x+2} - e^{-100x-2}) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \ (\text{car } x \neq 0) \\
& \Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{101}\right\}.}
$$