Fichiers Fonctions-Circulaires-Reciproques a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\cos(\arctan x).$$

Correction : $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \arctan x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 2 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\sin(\arctan x).$$

Correction : $\dfrac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)} = \tan(\arctan x)$.

Par conséquent, $\sin(\arctan x) = x\cos(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 3 : Simplifier en précisant le domaine de validité :

$$\tan(\arcsin x).$$

Correction : $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\cos(\arctan(x))$

Correction : $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \arctan(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 5 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right)$.

Correction : $\forall\, x \in [-1,1], \quad \cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right) = \dfrac{1+\cos(\arccos(x))}{2} = \dfrac{1+x}{2}$.

Exercice 6 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right)$.

Correction : $\forall\, x \in [-1,1], \quad \sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos(x)\right) = \dfrac{1-\cos(\arccos(x))}{2} = \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice 7 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\cos(2\arccos(x))$.

Correction : $\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.

Exercice 8 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\sin(2\arcsin(x))$.

Correction : $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin\arcsin(x)\cos\arcsin(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 9 : Simplifier en précisant le domaine de validité : $\tan(2\arctan(x))$.

Correction : $\tan(2\arctan(x)) = \dfrac{2\tan\arctan(x)}{1-\tan^2\arctan(x)} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Exercice 10 : Étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Correction : $|x| < \sqrt{1+x^2}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 11 : Établir que $\forall\, x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Que dire si $x < 0$?

Exercice 12 : Simplifier $\sin(2\arcsin(x))$.

Correction : Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 13 : Simplifier $\cos(2\arccos(x))$.

Correction : Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2-1$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Simplifier en précisant le domaine de validité

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Correction : Comme $x \in [-1,1]$, on peut poser $\mathrm{X} = \arcsin(x)$.

Alors $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin(2\sin(x)\cos(x)) = \arcsin(\sin 2\mathrm{X})$

- Si $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1$, alors $\dfrac{\pi}{4} < \mathrm{X} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < 2\mathrm{X} \leqslant \pi$. Par conséquent, $\arcsin(\sin 2\mathrm{X}) = \dfrac{\pi}{2} - 2\mathrm{X}$.
- Si $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\mathrm{X} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\arcsin(\sin 2\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}$:
- Si $-1 \leqslant x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{X} < -\dfrac{\pi}{2}$ et $-\pi \leqslant 2\mathrm{X} < -\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, $\arcsin(\sin 2\mathrm{X}) = \dfrac{\pi}{2} - 2\mathrm{X}$:

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left[-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ \dfrac{\pi}{2} - 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Exercice 2 : Montrer que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{8} = \arctan\dfrac{2}{3}$.

Correction : $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}$.

Or $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$ et $0<\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}$ donc $0<\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, x\in[1,+\infty[,\quad \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)+\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=\pi$.

Correction : En notant On pose $\theta=2\arctan(\sqrt{x})$, i.e. $x=\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Alors : $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)+\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=\arccos\left(\cos(\theta)\right)+\arcsin\left(\sin(\theta)\right)=\theta+(\pi-\theta)=\pi$.

Exercice 4 : Montrer $\forall\, x\in]0,1[,\quad \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos(x)$.

Correction : Comme $x\in]0,1[$, on peut poser $x=\cos\theta$, avec $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arctan\dfrac{+\sin\theta}{\cos\theta}=\arctan\tan\theta=\theta=\arccos(x)$.

Exercice 5 : Montrer $\forall\, x\in]-1,0[,\quad \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arccos(x)-\pi$.

Correction : Comme $x\in]-1,0[$, on peut poser $x=\cos\theta$, avec $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\arctan\dfrac{+\sin\theta}{\cos\theta}=\arctan\tan\theta=\theta-\pi=\arccos(x)-\pi$.

Exercice 6 : Résoudre l'équation $\arctan(x)+\arctan(x)\sqrt{3}=\dfrac{7\pi}{12}$.

Correction : $\arctan(x)+\arctan(x)\sqrt{3}=\dfrac{7\pi}{12}\iff\tan\left(\arctan(x)+\arctan(x)\sqrt{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$.

On obtient $\dfrac{x(1+\sqrt{3})}{1-x^2\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Deux solutions 1 (qui convient) et $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ (qui ne convient pas).

Exercice 7 : Résoudre l'équation : $\arctan(x)+\arctan(2x)=\dfrac{\pi}{4}$.

Correction : $\arctan(x)+\arctan(2x)=\dfrac{\pi}{4}\iff\dfrac{3x}{1-2x^2}=1$.

Deux solutions : $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$ (ne convient pas : négative) et $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ (convient nécessairement).

Exercice 8 : Montrer que $\forall\, x\in[0,1],\quad \arcsin\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Correction : La dérivée de chaque membre vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

Exercice 9 : Montrer que $\forall\, x\in]-1,1[,\quad \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(x)$.

Correction : Comme $x \in]-1,1[$, on peut poser $x = \sin\theta$, avec $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Alors : $\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arctan\frac{\sin\theta}{+\cos\theta} = \arctan\tan\theta = \theta = \arcsin(x)$.

Exercice 10 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$.

Correction : Soit $y \in \mathrm{R}$.

$f(x) = y \iff \frac{2x+1}{x-1} = y \iff 2x+1 = (x-1)y \iff (y-2)x = y+1$.

On constate que si on prend $y = 2$, on ne pourra pas trouver d'antécédent.

Maintenant, si $y \neq 2$, il y a un, et un seul antécédent : $x = \frac{y+1}{y-2}$. f est donc injective.

Exercice 11 : Étude complète $x \longmapsto \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

Exercice 12 : Simplifier $\sin^2\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)$.

Correction : Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos(x)\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(\arccos(x))) = \frac{1-x}{2}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

Établir les relations suivantes :

1. $\tan(t) = \operatorname{sh}(x)$
2. $\frac{1}{\cos(t)} = \operatorname{ch}(x)$
3. $\sin(t) = \operatorname{th}(x)$

Correction :

1. Remarquons d'abord que, par construction, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, t est donc dans le domaine de définition de la fonction $\tan$.

   En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ on obtient directement $\tan(t) = \tan(\arctan(\operatorname{sh}(x))) = \operatorname{sh}(x)$.
2. Ensuite, $\frac{1}{\cos^2(t)} = 1+\tan^2(t) = 1+\tan^2(\arctan(\operatorname{sh}(x))) = 1+\operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$.

   Or la fonction ch ne prend que des valeurs positives, et $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(t) > 0$.

   Ainsi $\frac{1}{\cos(t)} = \operatorname{ch}(x)$.
3. Enfin, $\sin(t) = \tan(t)\cdot\cos(t) = \operatorname{sh}(x)\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$.

Exercice 2 : Simplifier $\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

Correction : On pose $f : x \mapsto \arctan\frac{1+x}{1-x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathrm{D}_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

$\forall x \in \mathrm{D}_f$, $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

– Sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a $f = k_1 - \arctan$.
  En évaluant en 0, on obtient $\dfrac{\pi}{4} = k_1$.

$$\forall\, x \in]-1,+\infty[, \quad \arctan\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$$

– Sur l'intervalle $]-\infty,-1[$, on a $f = k_2 - \arctan$.
  En considérant la limite en $-\infty$, on obtient $-\dfrac{\pi}{4} = k_2 + \dfrac{\pi}{2}$.

$$\forall\, x \in]-\infty,-1[, \quad \arctan\frac{1+x}{1-x} = -\frac{3\pi}{4} - \arctan(x)$$

Exercice 3 :

1. Calculer $\mathrm{A} = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
2. Résoudre $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \dfrac{\pi}{4}$

Correction :

1. $\tan \mathrm{A} = \tan\left(\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8\right) = \dfrac{\tan\left(\arctan 2 + \arctan 5\right) + 8}{1 - 8\tan\left(\arctan 2 + \arctan 5\right)} = \dfrac{\dfrac{2+5}{1-10} + 8}{1 - 8\dfrac{2+5}{1-10}} = 1$

   Or $3\dfrac{\pi}{3} < \mathrm{A} < 3\dfrac{\pi}{2}$ donc $\mathrm{A} = \dfrac{5\pi}{4}$.
2. $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+5) = \dfrac{\pi}{4} \iff \dfrac{x(x^2-12)}{3x^2-10} = 1 \iff x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0.$

   Or 5 est une solution de cette dernière équation. Les autres sont $-1+\sqrt{3}$ et $-1-\sqrt{3}$.

   Mais 5 ne convient pas, et $-1-\sqrt{3}$ non plus. $\mathcal{S} = \left\{-1+\sqrt{3}\right\}$.

Exercice 4 : Résoudre $\arcsin(x) = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}$.

Correction : $\arcsin(x) = \arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} \iff x = \dfrac{4}{5}\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} + \dfrac{5}{13}\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}\dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}\dfrac{3}{5} = \dfrac{63}{65}$.

A-t-on $\dfrac{\pi}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$?

Or $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13}\right) = \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} - \dfrac{4}{5}\dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{13}\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\dfrac{5}{13} = \dfrac{16}{65} > 0$ d'où $0 < \dfrac{\pi}{2}\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} <$
et l'existence d'une solution pour l'équation.

Exercice 5 : Résoudre $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \arctan(x)$.

Correction : On pose $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \arctan(x) \iff \arcsin\sin\theta = \arctan\dfrac{\theta}{2}$

– Si $x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $-\pi < \theta < -\dfrac{\pi}{2}$. $\arcsin\sin\theta = -\pi - \theta$.
  L'équation se ramène à $-\pi - \theta = \dfrac{\theta}{2}$, soit $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $x = -\sqrt{3}$.
– Si $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. $\arcsin\sin\theta = \theta$.
  L'équation se ramène à $\theta = \dfrac{\theta}{2}$, soit $\theta = 0$ et $x = 0$.

– Si $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. $\arcsin\sin\theta = \pi - \theta$.

L'équation se ramène à $\pi - \theta = \frac{\theta}{2}$, soit $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Bilan : $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}$

Exercice 6 : Résoudre l'équation $\arccos(x) = \arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}$.

Correction : $\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3} \in [0, \pi]$ donc l'équation admet une unique solution.

$\arccos(x) = \arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3} \iff x = \cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right)$

Or, $\cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$.

$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}\right\}$.

Exercice 7 :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos(x)$.
2. Montrer que

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], & \arccos(4x^3 - 3x) = 3\arccos(x) \\ \forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & \arccos(4x^3 - 3x) = 2\pi - 3\arccos(x) \end{cases}$$

3. Déterminer une expression simplifiée de $\arccos(4x^3 - 3x)$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Correction :

1. ...
2. – Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   On pose $\alpha = \arccos(x)$, si bien que $\begin{cases} \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ \cos\alpha = x \end{cases}$. D'où $\begin{cases} 3\alpha \in [0, \pi] \\ \cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x \end{cases}$

   On en déduit que $3\alpha = \arccos(4x^3 - 3x)$.

   D'où
   $$\boxed{\arccos(4x^3 - 3x) = 3\arccos(x)}$$

   – Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

   On pose $\alpha = \arccos(x)$, si bien que $\begin{cases} \alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \\ \cos\alpha = x \end{cases}$. D'où $\begin{cases} 3\alpha \in [\pi, 2\pi] \\ \cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x \end{cases}$.

   On en déduit que $\begin{cases} 2\pi - 3\alpha \in [0, \pi] \\ \cos(2\pi - 3\alpha) = \cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x \end{cases}$ i.e. $2\pi - 3\alpha = \arccos(4x^3 - 3x)$.

   D'où
   $$\boxed{\arccos(4x^3 - 3x) = 2\pi - 3\arccos(x)}$$

– Soit $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

On pose $\alpha = \arccos(x)$, si bien que $\begin{cases} \alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \\ \cos\alpha = x \end{cases}$. D'où $\begin{cases} 3\alpha \in [2\pi, 3\pi] \\ \cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x \end{cases}$.

On en déduit que $\begin{cases} 3\alpha - 2\pi \in [0, \pi] \\ \cos(3\alpha - 2\pi) = \cos(3\alpha) = 4x^3 - 3x \end{cases}$ i.e. $3\alpha - 2\pi = \arccos(4x^3 - 3x)$.

D'où

$$\boxed{\arccos(4x^3 - 3x) = 3\arccos(x) - 2\pi}$$

Exercice 8 : On considère l'équation (E) : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

1. Montrer que (E) a trois solutions, et les encadrer par des entiers consécutifs.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
3. En posant $x = 2\sin\theta$, montrer que x est solution de (E) $\iff \sin 3\theta = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer la valeur exacte des solutions de E.

Exercice 9 :

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\arctan(k+1) - \arctan(k)$.
2. Montrer que la suite (S_n) où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\frac{1}{k^2+k+1}$ converge, et déterminer la limite.

Correction :

1. $\tan\left(\arctan(k+1) - \arctan(k)\right) = \dfrac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)} = \dfrac{1}{k^2+k+1}$.

   Or $\arctan(k+1) - \arctan(k) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\dfrac{1}{k^2+k+1}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k)) = \arctan(n+1)$.

   D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 : Résoudre l'équation $\tan(3\arcsin(x)) = 1$. On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2}).$$

Correction : Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})) \\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} = 2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1 + 4x^2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4 - 6x^2 + 2) = (4x^2+1)^2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\arcsin\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\arcsin\sqrt{\frac{7}{32}} + \arcsin(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \arcsin(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ce qui achève la résolution.

$$\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.$$

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin(x)$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\iff x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1] \\
&\iff x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \iff x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1 \\
&\iff x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0 \iff x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geqslant 0 \\
&\iff x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,
$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\iff x \in [-1,1] \text{ et } 2\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&\iff x \in [-1,1] \text{ et } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Exercice 13 : Étude complète de $f : x \longmapsto = \frac{1+x^2}{x^3}(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2})$.

Correction : f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, f est paire. On étudiera f sur $[0, +\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).

Étude en 0 (à gauche et à droite).

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x(1 - x^2 + x^4 + o(x^4))] \\
&= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + o(x^2)) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2x^2}{15} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Par suite, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{2}{3}$. Puisque f admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. C_1 admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y = \frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x) - \frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

Étude en $+\infty$ (et $-\infty$). $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.

Dérivée, variations.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2})(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}) \\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}) \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan(x) + \frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2))} = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}$$

où, pour tout réel x, $g(x) = -\arctan(x) + \frac{3x}{3+x^2}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$g'(x) = 3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2} - \frac{1+x^2}{=}\frac{3(3-x^2)(1+x^2)-(3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' est donc strictement négative sur $]0, +\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $g(0) = 0$, pour $x > 0$, $g(x) < 0$. Finalement, f' est strictement négative sur $]0, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Le tableau de variations de f n'apporte rien de plus.