Fichiers Fonctions-Reference-Graphe a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{x}+5} - \sqrt{\frac{1}{x}+2}$.

Exercice 2 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$.

Exercice 3 : Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1. $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}$.
3. $x \longmapsto 1+\ln(2-x)$.

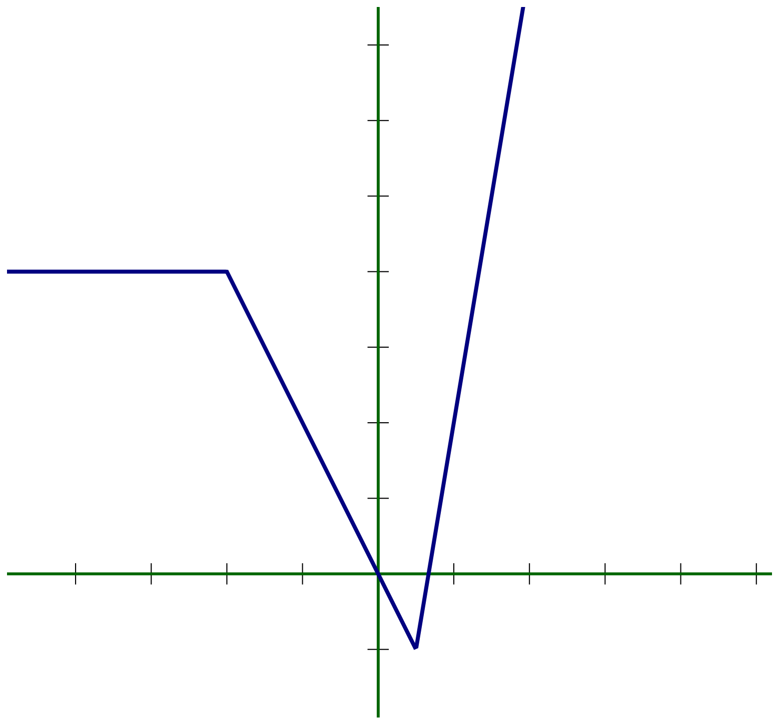
Exercice 4 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.

Correction : On notera $\mathcal{C}_i$ le graphe de f_i.

f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	-2 $\quad$ $1/2$	$1/2$ $\quad$ $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

On en déduit $\mathcal{C}_1$.



Exercice 5 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+dx+3}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que :

- Le point $A(2,-11)$ appartienne à la courbe de f, et sa tangente en ce point ait pour coefficient directeur -9.
- Les droites d'équation $x=1$ et $y=2$ soient asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6 : Soit $f : x \longmapsto x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

Étudier la fonction f (parité, asymptotes).

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$.

Exercice 2 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto x \times 2^{-x}$ et donner la tangente en $\dfrac{2}{\ln 2}$.

Exercice 3 : On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.

1. Tracer rapidement l'allure du graphe de f.
2. Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0,2]$ et $[-2,2]$ sont stables par f.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto x^x$.

Exercice 2 : Étudier complète de la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$.

Exercice 3 : Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_5(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).

Correction : Soit $x>0$. x n'est pas nul donc $\dfrac{1}{x}$ existe puis $1+\dfrac{1}{x}>0$ et $f_5(x)$ existe.

Étude en 0.

Pour $x>0$, $x\ln(1+\dfrac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x) = \exp(x\ln(1+\dfrac{1}{x}))$ tend vers 1.

Posons encore $f_5(0)=1$ et étudions la dérivabilité de f_5 en 0. Pour $x>0$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))-1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = +\infty.$$

Ainsi, f_5 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathcal{C}_5$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0,f_5(0)) = (0,1)$.

Étude en $+\infty$.

Pour $x>0$, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=1$.

Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty}f_5(x)=e.$$

Étude des variations de f_5.

Pour $x>0$, $f_5(x)>0$ puis $\ln(f_5(x))=x\ln(1+\dfrac{1}{x})$. Par suite, pour $x>0$,

$$f_5'(x)=f_5(x)\ln(f_5)'(x)=f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right)=f_5(x)g(x),$$

où $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$. Sur $]0,+\infty[$, f_5' est du signe de g.

Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0,+\infty[$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, g est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Il en est de même de f_5'. f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty($.

On en déduit $\mathcal{C}_5$.