Fichiers Fonctions-Reference-Etude a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1).$$

Exercice 2 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}.$$

Exercice 3 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{x}+5} - \sqrt{\frac{1}{x}+2}.$$

Exercice 4 : Étudier la fonction définie par

$$x \longmapsto x \times 2^{-x}.$$

Donner l'équation de la tangente en $\dfrac{2}{\ln(2)}$.

Exercice 5 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto x^x.$$

Exercice 6 : Étudier la fonction définie par :

$$x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}.$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

Correction : $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ *dont la dérivée est donnée par* $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ *atteint son maximum en* e.

Il reste à comparer $\sqrt{2}$ *et* $\sqrt[3]{3}$ *en élevant à la puissance* 6.

On obtient $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n} = \sqrt[3]{3}$.

Exercice 2 : Montrer que

$for x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Correction : $x^x(1-x)^{1-x} = \exp(x\ln x + (1-x)\ln(1-x))$

$f : x \longmapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ *et* $f'(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

Minimum en $1/2$.

Exercice 3 : Démontrer les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{ et } \quad 1 + x \leqslant e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Correction :

1. Soit $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} > 0$.

   Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ pour $x > 0$. Ce qui donne l'inégalité recherchée.

2. De même avec $g(x) = e^x - x - 1$, $g'(x) = e^x - 1$.

   Sur $[0, +\infty[$ $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante sur $]-\infty, 0]$, $g'(x) \leqslant 0$ et g est décroissante.

   Comme $g(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geqslant 0$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Correction : f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Étude en $-\infty$. Soit $x \leqslant -1$.

$$f_3(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1})}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x - \sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0$.

Étude en $+\infty$. Immédiatement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$.

Ensuite, pour $x \geqslant 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$.

Mais alors,

$$f_3(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(-x + \sqrt{x^2-1})(-x - \sqrt{x^2-1})}{-x - \sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f_3(x) - 2x) = 0$ et donc que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$.

Étude en 1. Pour $x > 1$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = \frac{(x-1) + \sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = \frac{(x-1) + \sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim\limits_{x \to 1,\, x > 1} \dfrac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1,\, x < 1} \dfrac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = -\infty$.

On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathcal{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de $\mathcal{C}_3$ d'abscisse 1.

Les résultats sont analogues en -1.

Étude des variations de f_3. Pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x > 1$, on a $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ et donc, $f_3'(x) > 0$.
Si $x < -1$, on a

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

et donc, $x + \sqrt{x^2-1} < 0$ puis $f_3'(x) < 0$.

Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Pour $x \in]-1, 1[$, $f_3(x) = x + \sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

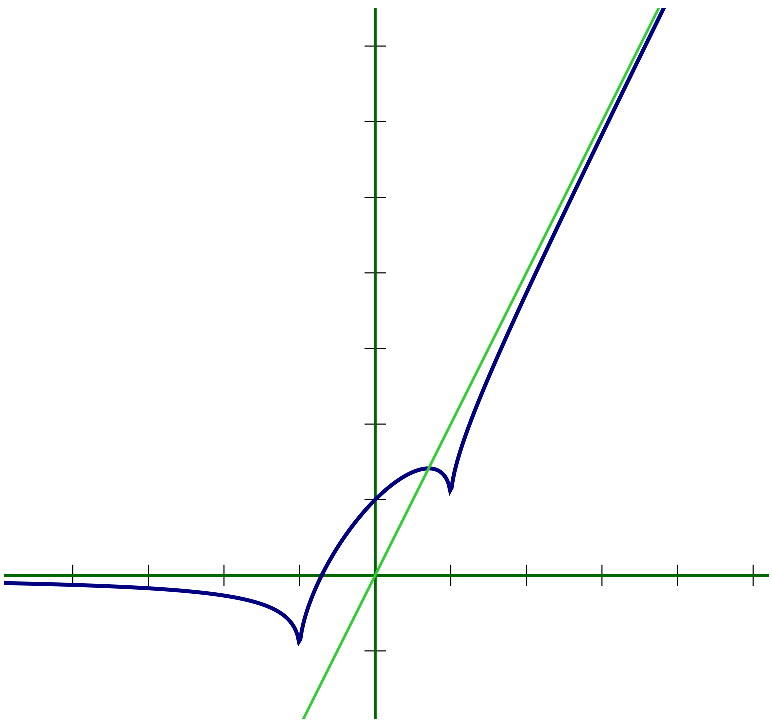
Si $x \in]-1, 0]$, on a clairement $f_3'(x) > 0$.
Si $x \in [0, 1[$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\mathrm{sgn}(f_3'(x)) = \mathrm{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x) = \mathrm{sgn}((-x^2+1)-x^2) = \mathrm{sgn}(1-2x^2) = \mathrm{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \mathrm{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}}-x).$$

Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1, +\infty[$. f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1, +\infty[$.

On en déduit $\mathcal{C}_3$.



Exercice 2 : Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Correction :

$$x^y = y^x \iff e^{y\ln x} = e^{x\ln y} \iff y\ln x = x\ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective).

Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0, 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1, e[$ et une dans $]e, +\infty[$.

Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y = 1$, $y = 2$ et $y \geqslant 3$.

Si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x = 1$.

Si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$.

Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions : une sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.

Si $y \geqslant 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e, +\infty[$ qui est $x = y$, et une solution x dans l'intervalle $]1, e[$.

Mais comme x est un entier alors $x = 2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1, e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.

Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Exercice 3 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.

Correction : **Domaine de définition de f_6.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f_6(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln \frac{1}{2}} < 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \ln(x^2 - 5x + 6) > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{5 - \sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5 + \sqrt{3}}{2}, +\infty[= \mathcal{D}_f.
\end{aligned}$$

Variations de f_6 .

La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$.

Comme $\dfrac{5 + \sqrt{3}}{2} > \dfrac{5}{2}$ et que $\dfrac{5 - \sqrt{3}}{2} < \dfrac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{5 + \sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est strictement croissante.

La fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Axe de symétrie Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} - x \in \mathcal{D}_f$ et de plus, $\left(\dfrac{5}{2}-x\right)^2 - 5\left(\dfrac{5}{2}-x\right) + 6 = x^2 - 5x + 6$.

Par suite,

$$\forall\, x \in \mathrm{D},\ f_6(\frac{5}{2}-x) = f_6(x).$$

$\mathcal{C}_6$ admet donc la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$ pour axe de symétrie.

Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit $\mathcal{C}_6$.